Lösung zu Aufgabe T1

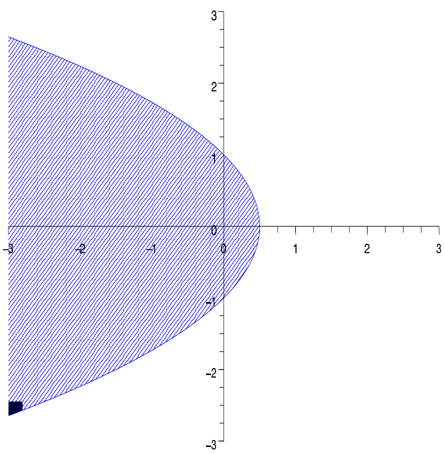
(a) Es ist $1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} &= 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k+1 \\ (-1)^k 2^{2k+1} & \text{falls } n = 2k \end{cases} . \end{aligned} \tag{45}$$

(b) (i) Für $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |z| &< 1 - Re\, z \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < 1 - x \Leftrightarrow x^2 + y^2 < (1-x)^2 \Leftrightarrow \\ y^2 &< 1 - 2x \Leftrightarrow x < \frac{1-y^2}{2}. \end{aligned} \tag{46}$$

Die Menge M_1 ist das Innere der unten skizzierten Parabel ohne den Rand.



(ii) Zuerst bemerken wir, das der Ausdruck $Re\,\frac{1}{z}$ für $z = 0$ nicht definert ist. Mit $z = x + iy \neq 0,\ x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & Re\,\frac{1}{z} = Re\,\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = Re\,\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z-1| = 1 \end{aligned} \tag{47}$$

Die gesuchte Menge ist das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(1, 0)$ mit Radius 1 ausgenommen der Nullpunkt.

(c) Zuerst betrachten wir ein komplexes Polynom $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_0$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra wissen wir, daß das Polynom auf $\mathbb{C}$ n Wurzeln hat. Folglich können wir das Polynom als $p(z) = (z - z_0) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1})$ schreiben. Multiplizieren wir die Produktdarstellung des Polynom $p(z)$ aus, so erhalten wir

$p(z) = z^n - (z_0 + \ldots + z_{n-1}) z^{n-1} + \ldots + (-1)^n (z_0 z_1 \ldots z_{n-1})$. Koeffizientenvergleich der beiden Darstellungen für unser Polynom ergibt

$$a_1 = \sum_{j=0}^{n-1} z_j \text{ und } a_n = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} z_j. \tag{48}$$

Jetzt betrachten wir das Polynon $p_m(z) = z^m - 1$. Nach der Vorlesung wissen wir, daß dieses Polynom die Nullstellen $\epsilon^j = \cos\left(\frac{2j\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2j\pi}{m}\right), j = 0, \ldots, m-1$ hat. Damit erhalten wir

$$0 = a_1 = \sum_{j=0}^{m-1} \epsilon^j = \sum_{j=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2j\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2j\pi}{m}\right) \tag{49}$$

Dies liefert dann

$$\sum_{j=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2j\pi}{m}\right) = 0 = \sum_{j=0}^{m-1} \sin\left(\frac{2j\pi}{m}\right) \tag{50}$$

Auch folgt daraus, daß

$$1 + \sum_{j=1}^{m-1} \cos\left(\frac{2j\pi}{m}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m-1} \cos\left(\frac{2j\pi}{m}\right) = -1. \tag{51}$$

Weiter wissen wir, daß weiter gilt:

$$-1 = a_n = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1} \epsilon^j \Rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} \epsilon^j = (-1)^{m-1}. \tag{52}$$

Für $m = np,\ p,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \leq p < n$ unter Ausnutzung der Formel von Moivre folgt dann die Behauptung.

Bemerkung: Ein alternativer Lösungsweg für das Produkt $\prod_{j=1}^{m-1} \epsilon^j$ ist der folgende:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{m-1} \epsilon^j &= \epsilon^{\sum_{j=0}^{m-1} j} = \epsilon^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&= \cos\left(2\pi \frac{m(m-1)}{2m}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{m(m-1)}{2m}\right) \\
&= \cos(\pi(m-1)) + i \sin(\pi(m-1)) \\
&= (-1)^{m-1}
\end{aligned} \tag{53}$$

(d) (i) Es wird eine Translation beschrieben und zwar 4 nach rechts und -2 nach unten.

(ii) Es ist $(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Es wird eine Drehstreckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ und den Winkel $\frac{\pi}{4}$ dargestellt.

(iii) Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ ist eine Spiegelung an der reellen Achse und die Abbildung $z \mapsto -\bar{z}$ ist eine Spiegelung an der imaginären Achse. Damit ist $z \mapsto -3\bar{z}$ eine Spiegelung an der imaginären Achse verbunden mit einer Streckung um den Faktor 3.

(iv) Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ wird **Inversion** genannt. Es wird eine Spiegelung an der reellen Achse dargestellt, verbunden mit der Streckung um den Faktor $\frac{1}{r}$. Also hat die komplexe Zahl $\frac{1}{z}$ die Polarkoordinatendarstellung $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(\phi) - i\sin(\phi))$.

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Wir haben $z^4 - 2z^+2 = 0$. Mit der Substitution $w = z^2$ erhalten wir $w^2 - 2w + 2 = 0$. Jetzt Anwendung der Lösungsformel für quadratische Polynome liefert

$$w_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i. \tag{54}$$

Da $w = z^2$ müssen wir jetzt noch die beiden Gleichungen $z^2 = 1 + i \ \wedge z^2 = 1 - i$ lösen. Umwandlung in Polarkoordinaten liefert

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \ \wedge \ z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{55}$$

Anwendung der Lösungsformel für komplexe Wurzeln liefert dann

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)\\
z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)\\
z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{8}\right)\right).
\end{aligned} \tag{56}$$

Man beachte in den Formeln von z_2 und z_3, daß für das Argument $-\frac{9\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$und $-\frac{\pi}{8} = \frac{15\pi}{8}$ gilt.

(b) Wir setzen $x := Re\, z$ und $y := Im\, z$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\bar{z} = 4z^3 \quad &\Leftrightarrow \quad x - iy = 4(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) = 4x(x^2 - 3y^2) + 4ix(3x^2 - y^2)\\
&\Leftrightarrow \quad x = 4x(x^2 - 3y2) \ \wedge \ y = -4y(3x^2 - y^2)
\end{aligned} \tag{57}$$

1.Fall: $x = 0 \Rightarrow y = 4y^3 \Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ y = \frac{1}{2} \ \vee \ y = -\frac{1}{2}$.

2.Fall: $y = 0 \Rightarrow x = 4x^3 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$.

3.Fall: $x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$. daraus erhalten wir dann $x^2 - 3y^2 = \frac{1}{4} \ \wedge \ 3x^2 - y^2 = -\frac{1}{4}$. Addition dieser beiden Gleichungen liefert dann $x^2 = y^2$ und $y^2 = -\frac{1}{8} = x^2$. Dies in die Gleichung $\bar{z} = 4z^3$ eingesetzt liefert einen Widerspruch.

Als Ergebnis haben wir $\bar{z} = 4z^3 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\frac{1}{2} \vee z = \pm i\frac{1}{2}$.

(c) Wir erraten die erste Nullstelle als $z_0 = -1$ von $z^3 - z^2 + 2$. Anschließende Polynomdivision

$$\begin{array}{rl} & (z^3 - z^2 + 2) : (z+1) = z^2 - 2z + 2 \\ - & \underline{(z^3 + z^2)} \\ & \quad -2z^2 + 2 \\ & \underline{-(-2z^2 - 2z)} \\ & \qquad 2z + 2 \\ & \underline{-(2z+2)} \\ & \qquad\quad 0 \end{array} \tag{58}$$

liefert $z^3 - z^2 + 2 = (z+1)(z^2 - 2z + 1)$. Weiter hat das Polynom $z^2 - 2z + 2$ nach Teil (a) die Nullstellen $z_{1,2} = 1 \pm i$.

(d) Wir formen zuerst den Ausdruck $\frac{4+i}{3+5i}$ auf Polarkoordinaten um und erhalten $\frac{4+i}{3+5i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. Damit müssen wir die Gleichung

$$z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \tag{59}$$

lösen. Mit der allgemeinen Lösungsformel für die Lösung von $z^n = a$ erhalten wir

$$z_k = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \; k = 0, 1, 2. \tag{60}$$

bzw.

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ z_1 &= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\ z_2 &= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right). \end{aligned} \tag{61}$$

Lösung zu Aufgabe T3

(a) Wir untersuchen auf lineare Unabhängigkeit, d.h. wir machen den Ansatz $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ und bestimmen die Zahlen α, β, γ.. Wenn $\alpha = \beta = \gamma = 0$ gilt sind die drei Vektoren linear unabhängig. Also wir haben

$$\begin{aligned} \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} &= \alpha(\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}) + \beta(-\vec{y} + 2\vec{z}) + \gamma(-2\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{x}(\alpha - 2\gamma) + \vec{y}(2\alpha - \beta + \gamma) + \vec{z}(-\alpha + \beta) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{62}$$

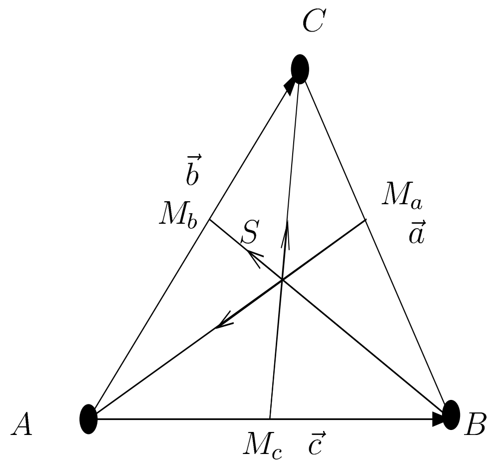
Jetzt nutzen wir aus, daß die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ $\vec{z}$ linear unabhängig sind, d.h es mußs gelten

$$\alpha - 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 2\gamma \searrow$$

$$\begin{array}{rcll} 2\alpha-\beta+\gamma &=& 0 & \Rightarrow 4\gamma.\gamma+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=0. \\ -\alpha+\beta &=& 0 \Rightarrow \alpha=\beta \nearrow & \end{array} \tag{63}$$

Als Ergebnis erhalten wir dann $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Also sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig.

(b) Skizze des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C



Es gilt $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Wenn $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind handelt es sich um ein entartetes Dreieck. Mit M_A, M_B, M_C seien die Seitenmitten und mit $\overrightarrow{M_AA}$, $\overrightarrow{M_BB}$, $\overrightarrow{M_CC}$ die Seitenhalbierenden bezeichnet. Mit $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c}$ folgt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_AA} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{c} = -\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \\ \overrightarrow{M_CC} &= -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}. \end{aligned} \tag{64}$$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich, daß ist äquivalent zu der Aussage, daß $\overrightarrow{M_AA}$ und $\overrightarrow{M_CC}$ linearunabh2angig sind. Der Ansatz $\alpha\overrightarrow{M_AA} + \gamma\overrightarrow{M_CC} = 0$ führt auf

$$0 = \alpha\left(-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right) + \gamma\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{b}\left(-\frac{1}{2}\alpha + \gamma\right) + \vec{c}\left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right). \tag{65}$$

Da die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind erhalten wir

$$\left.\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}\alpha+\gamma &=& 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2} &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \tag{66}$$

Als erstes Zwischenergebnis erhalten wir, daß $\overrightarrow{M_AA}$ und $\overrightarrow{M_CC}$ linear unabhängig sind, d.h. die Geaden die durch M_A und A sowie M_C und C schneiden sich in genau einem Punkt, den wir mit S bezeichnen. Aus der obigen Skizze kann man weiter den folgenden Zusammenhang erkennen.

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CM_A} + \overrightarrow{M_AS} = \lambda\overrightarrow{M_CC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \mu\overrightarrow{M_AA} \\ &= \lambda\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\mu(\vec{b}+\vec{c}) \end{aligned}$$

$$= \vec{b}\left(\lambda - \frac{1}{-}\frac{1}{2}\mu\right) + \vec{c}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) \tag{67}$$

Da $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu &= 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{68}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert $\lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SC} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{M_cC} \text{ und } \overrightarrow{M_AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_AA} \\ \overrightarrow{M_CS} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{M_CC} \text{ und } \overrightarrow{SA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{M_AA} \end{aligned} \tag{69}$$

Daraus folgt

$$\frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{M_CS}} = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{M_AS}} = \frac{2/3}{1/3} = \frac{2}{1}. \tag{70}$$

Also teilt S die Strecken $\overrightarrow{M_AA}$ und $\overrightarrow{M_CC}$ jeweils im Verhältnis $1:2$.
Jetzt müssen wir noch nachweisen,daß S auch auf der Strecke $\overrightarrow{M_BB}$ liegt. Wir haben

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_BS} &= \overrightarrow{M_BA} + \overrightarrow{AS} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\overrightarrow{M_AA} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right) = \vec{b}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \vec{c}\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{b} = \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_BB}. \end{aligned} \tag{71}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_BB} &= \overrightarrow{M_BS} + \overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{M_BB} - \overrightarrow{M_BS} \\ &= \overrightarrow{M_BB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{M_BB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{M_BB} \end{aligned} \tag{72}$$

Somit sind $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{M_BS}$ linear abhängig, d.h. M_B, S B liegen auf einer Geraden und S teilt die Strecke $\overrightarrow{M_BB}$ im Verhältnis $2:1$. Wir bemerken noch, daß S der Schwerpunkt des Dreiecks ist.

Lösung zu Aufgabe T4

(a) Die beiden Geraden sind nicht parallel, weil ihre Richtungsvektoren linear unabhängig sind. (Bei zwei Vektoren bedeutet dies, dass keiner ein Vielfaches des anderen ist.)

Die Geraden schneiden sich auch nicht, denn sonst müsste es $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad 1+s=t, \quad -5-s=-2t, \quad 1+s=5t \tag{73}$$

geben. Addiert man die zweite Gleichung zur ersten Gleichung, folgt $4 = t$; addiert man dagegen die zweite und dritte Gleichung, folgt $-4 = 3t$. Diese Gleichungen können nicht beide gelten, also schneiden sich die Geraden nicht.

(b) Eine Parameterdarstellung von E ist

$$E \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Um die Hessesche Normalform von E anzugeben, brauchen wir zunächst einen Vektor, der auf E senkrecht steht, d. h. wir suchen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0. \tag{75}$$

Dies bedeutet, wir suchen ein $\vec{a}$ mit

$$a_1 - a_2 + a_3 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 - 2a_2 + 5a_3 = 0. \tag{76}$$

Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, ergibt sich $a_2 - 4a_3 = 0$. Dies ist z. B. für $a_2 = 4$ und $a_3 = 1$ erfüllt; die erste Gleichung liefert dann $a_1 = 3$ und dies genügt auch der zweiten Gleichung.

Die Ebene E lässt sich folglich darstellen als

$$E \ : \ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \tag{77}$$

mit einem gewissen $\alpha \in \mathbb{R}$. Setzen wir einen Punkt der Ebene ein, etwa $(1, -5, 1)$, so folgt $\alpha = -16$. Um nun die Hessesche Normalform zu gewinnen, müssen wir zum einen noch dafür sorgen, dass der Normalenvektor Norm 1 hat, zum anderen muss die Zahl auf der rechten Seite der Gleichung ≥ 0 sein. Wegen $\|\vec{a}\| = \sqrt{26}$ dividieren wir die Gleichung also durch $-\sqrt{26}$ und erhalten die Hessesche Normalform

$$E \ : \ \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{16}{\sqrt{26}}. \tag{78}$$

(c) Die Gerade h ist parallel zu E, also ist ihr Abstand von E gleich dem Abstand zwischen E und einem beliebigen Punkt auf h. Wir wählen den Nullpunkt; laut Vorlesung ergibt sich der Abstand

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{16}{\sqrt{26}} = \frac{16}{\sqrt{26}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \right|. \tag{79}$$

(d) Es bezeichne Q den Punkt auf g, der von P den geringsten Abstand hat. Dann steht der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht auf den beiden Geraden und hat gemäß **c)** die

Länge $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$. Folglich ist entweder $\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \cdot \vec{n}$ oder aber $\overrightarrow{PQ} = -\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \cdot \vec{n}$, wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor in der Hesseschen Normalform von E sei.

Da der Normalenvektor in der Hesseschen Normalform vom Nullpunkt in Richtung E weist und h durch den Nullpunkt geht, also auf der gleichen Seite von E liegt wie dieser, ist $\overrightarrow{PQ} = +\frac{8}{\sqrt{13}} \cdot \vec{n}$. Für gewisse $s, t \in \mathbb{R}$ (diese repräsentieren Q bzw. P) muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{8}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Dies liefert die drei Gleichungen

$$1 + s = t + \frac{24}{13} \quad \text{und} \quad -5 - s = -2t + \frac{32}{13} \quad \text{und} \quad 1 + s = 5t + \frac{8}{13}. \tag{81}$$

Wir Multiplikation der ersten Gleichung mit (-1) und Addition zur dritten ergibt $t = \frac{4}{13}$. (Zur Kontrolle: Die zweite Gleichung liefert $s = \frac{15}{13}$ und auch die anderen Gleichungen sind dann erfüllt.) Der Punkt P hat also die Koordinaten

$$P = \frac{4}{\sqrt{13}}(1, -2, 5). \tag{82}$$

Bemerkung: Eine andere Lösungsmöglichkeit wäre, die Ebene E_1 zu bestimmen, die g enthält und zu E senkrecht steht. Ihr Schnitt mit h liefert dann P.