UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
1. Dezember 2006

Lösungen zum 6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1

(a) Die Vektoren $\vec{v}_i,\ i = 1, \dots n$ sind orthogonal, d.h. für das Skalarprodukt gilt

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} = |\vec{v}_i|^2 & \text{für } i = j \\ = 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}. \tag{1}$$

Jetzt untersuchen wir das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{v}_i,\ i = 1, \dots n$. Wir erhalten dann

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \vec{v}_j \right) \cdot \vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_i = a_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = a_i |\vec{v}_i|^2,\ i = 1, \dots n. \tag{2}$$

Dies bedeutet dann:

$$a_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_i}{|\vec{v}_i|^2}. \tag{3}$$

Wenn die Vektoren $\vec{v}_i,\ i = 1, \dots n$ orthonormal sind, bedeutet dies, daß $\vec{v}_i = 1$ ist ,d.h. die Koeffizienten a_i berechnen sich zu

$$a_i = \vec{x} \cdot \vec{v}_i. \tag{4}$$

(b) Zuerst überprüfen wir , ob die Vektoren orthogonal sind. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 8 + 5 = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -21 - 4 + 25 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -7 + 2 + 5 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Also sind die Vektoren orthogonal. Jetzt berechnen wir die Quadrate der Beträge der Vektoren $\vec{v}_i$: $|\vec{v}_1|^2 = 50,\ |\vec{v}_2|^2 = 6,\ |\vec{v}_3|^2 = 75$. Nach der obigen Formel haben wir dann

$$a_1 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2} = \frac{\begin{pmatrix}10\\-3\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}}{50} = \frac{30+12+35}{50} = \frac{77}{50}, \tag{6}$$

$$a_2 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2} = \frac{\begin{pmatrix}10\\-3\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}{6} = \frac{10-6+7}{6} = \frac{11}{6}, \tag{7}$$

$$a_3 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|^2} = \frac{\begin{pmatrix}10\\-3\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\1\\5\end{pmatrix}^T}{7} = \frac{-70-3+35}{75} = -\frac{38}{75}. \tag{8}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind genau dann parallel, wenn die zu gehörigen Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ linear abhängig sind, d.h. $\vec{n}_1 = a\vec{n}_2$ bzw. $\vec{n}_2 = b\vec{n}_1$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$. Wenn die Ebenen in Punkt-Richtungsform gegeben sind, so müssen wir daraus die Normalenvektoren bestimmen. Die Ebene $E_i,\ i = 1,2$ hat die Darstellung

$$\vec{x} = \vec{a}_i + \lambda_i\vec{b}_i + \mu_i\vec{c}_i,\ i = 1,2. \tag{9}$$

mit dem Stellvektor a_i und den Richtungsvektoren b_i und c_i. Nun wissen wir aus der Vorlesung, daß das Kreuzprodukt zweier Richtungsvektoren senkrecht auf diesen beiden Vektoren steht, also erhalten wir für die Normalenvektoren

$$\vec{n}_i = \vec{b}_i \times \vec{c}_i,\ i = 1,2. \tag{10}$$

Jetzt berechnen wir die Normalenvektoren für unsere Ebenen E_1 und E_2. Zuerst geben wir nochmals kurz die Formel für das Kreuzprodukt zweier beliebiger Vektoren $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ an:

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3 - x_3y_2\\x_3y_1 - x_1y_3\\x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Wir erhalten dann

$$n_1 = b_1 \times c_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+1\\2+2\\-1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$n_2 = b_2 \times c_2 = \begin{pmatrix}9\\13\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}39-15\\-5-27\\27+13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\-32\\40\end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix} \tag{13}$$

Wir sehen aus den beiden letzten Gleichungen, daß $n_2 = -8n_1$ ist, folglich sind die beiden Ebenen parallel.

Jetzt müssen wir noch den Abstand der beiden Ebenen bestimmen. Dazu bestimmen wir zuerst die Hessesche Normalform einer der beiden Ebenen z.B. E_1, den Abstand der beiden Ebenen erhält man, wenn man einen Punkt, der der Ebene E_2 angehört in die Hessesche Normalform von E_1 einsetzt.

Der Vektor $\vec{n}_1^0 = \frac{1}{|n_1|}\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}$ ist ein Normaleneinheitsvektor von E_1 und somit

$$(\vec{x} - \vec{a_1}) \cdot \vec{n}_0^1 = 0 \tag{14}$$

die Hessesche Normalform von E_1. Jetzt setzen wir einen Punkt etwa $\vec{a}_2$ in diese HNF ein und erhalten so den Abstand der Ebene E_1 und E_2:

$$\begin{aligned} A &= \left|(\vec{a}_2 - \vec{a_1}) \cdot \vec{n}_1^0\right| = \left| \begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{50}}(9+16+5) = \frac{30}{\sqrt{50}} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) (i) **1.Lösungsweg:** Da die beiden Ebenen durch den Nullpunkt gehen, geht auch die Schnittgerade durch den Nullpunkt. Wir müssen also nur einen Richtungsvektor für die Schnittgerade bestimmen. Da die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$, $\vec{d}$ die Ebenen E_1 und $E :_2$ aufspannen, sind die zugehörigen Normalenvektoren durch $\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{b}$ bzw. $\vec{n}_2 = \vec{c} \times \vec{d}$ gegeben. Der zugehörige Richtungsvektor $\vec{r}$ der Schnittgeraden steht senkrecht auf diesen beiden Vektoren. Also haben wir

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \cdot \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \cdot \vec{d}. \tag{15}$$

nach der Vorlesung. Für die beiden Spatprodukte erhalten wir

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] = -3,\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 6 \tag{16}$$

Damit folgt

$$\vec{r} = -3\vec{c} - 6\vec{d} = -3\begin{pmatrix}5\\8\\9\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}11\\16\\21\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Folglich lautet die Gleichung der Schnittgeraden

$$\vec{x} = t\begin{pmatrix}11\\16\\21\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

(ii) **2.Lösungsweg:** Die Punkt-Richtungsform der Ebene E_1 lautet

$$E_1 : \vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda + 4\mu\\2\lambda + 5\mu\\3\lambda + 6\mu\end{pmatrix} \tag{19}$$

bzw.

$$x = \lambda + 4\mu,\ y = 2\lambda + 5\mu,\ z = 3\lambda + 6\mu. \tag{20}$$

Daraus folgt aus den Gleichungen für x und y:

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(-5x + 4y\right),\ \mu = \frac{1}{3}\left(2x - y\right). \tag{21}$$

Dies in die Gleichung für z eingesetzt ergibt die Normalform von E_1:

$$E_1 : x - 2y + z = 0. \tag{22}$$

Entsprechend findet man für E_2:

$$E_2 : 12x - 3y - 4z = 0. \tag{23}$$

Um nun eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden zu gewinnen setzten wir in den beiden letzten Gleichungen $z = \nu$ und erhalten

$$x - 2y + \nu = 0 \tag{24}$$

$$12x - 3y - 4\nu = 0. \tag{25}$$

Daraus erhält man

$$x = \frac{11}{21}\nu,\ y = \frac{16}{21}\nu. \tag{26}$$

Setzten wir jetzt noch $\tau = \dfrac{\nu}{21}$, so erhalten wir als Ergebnis

$$\vec{x} = \tau \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Beachte, daß E_1 und E_2 den Nullpunkt enthalten, also liegt auch der Nullpunkt auf der Schnittgeraden.

Lösung zu Aufgabe H3

(a)

$$G = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}} = \frac{3 - 0}{5 + 0 - 0} = \frac{3}{5} \tag{28}$$

(b)

$$G = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 4n}{2n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n + 4}{2 - \frac{1}{n}} = \infty \tag{29}$$

(c)

$$G = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 - 4n^2}{3n^7 + n^3 - 10} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n^3}}{3n^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{10}{n^5}} = 0 \tag{30}$$

(d)

$$\begin{aligned} G &= \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{31}$$

(e)

$$\begin{aligned} G &= \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(a+n)(b+n)} - \sqrt{(a-n)(b-n)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{(a+n)(b+n)} - \sqrt{(a-n)(b-n)}\right)\left(\sqrt{(a+n)(b+n)} + \sqrt{(a-n)(b-n)}\right)}{\left(\sqrt{(a+n)(b+n)} + \sqrt{(a-n)(b-n)}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a+n)(b+n) - (a-n)(b-n)}{\left(\sqrt{(a+n)(b+n)} + \sqrt{(a-n)(b-n)}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(a+b)n}{\left(\sqrt{(a+n)(b+n)} + \sqrt{(a-n)(b-n)}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(a+b)}{\left(\sqrt{(\frac{a}{n}+1)(\frac{b}{n}+1)} + \sqrt{(\frac{a}{n}-1)(\frac{b}{n}-1)}\right)} \\ &= \frac{2(a+b)}{2} = a+b \end{aligned} \tag{32}$$

(f)

$$\begin{aligned} G &= \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\dfrac{n}{n-1}}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1}} \qquad (33) \\ &= \frac{1}{e} \qquad (34) \end{aligned}$$

Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Lösung zu Aufgabe T1

(a) Die Ebene $E_1 : x + 2y - z + 4 = 0$ hat den Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E_2 : 2x - y + \alpha z - 1 = 0$ hat den Normalenvektor $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Die beiden Ebenen E_1 und E_2 stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die zugehörigen Normalenvektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n_2}$ senkrecht aufeinanderstehen, d.h. das Skalarprodukt $\vec{n}_1 \cdot \vec{n_2}$ verschwindet. Wir haben also

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix} = 2 - 2 - \alpha = \alpha = 0. \tag{35}$$

Also für $\alpha = 0$ stehen die beiden Ebenen senkrecht aufeinander.

(b) Zuerst bestimmen wir den Ortvektor des Schwerpunktes S. Aus $\vec{a} = \alpha \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \beta \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \vec{a_0} \times \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ folgt für den Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \\ \beta + \gamma \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Weiter lautet die Geradengleichung von g

$$\vec{x} = \vec{u} + t\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + 11t \\ 7t \\ \frac{5}{3} + 2t \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Da nun der Schwerpunkt S auf der Geraden g liegen soll gilt

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \\ \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + 11t \\ 7t \\ \frac{5}{3} + 2t \end{pmatrix}, \tag{38}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 4 + 33t && (39) \\ \alpha + \beta - \gamma &= 21t && (40) \\ \beta + \gamma &= 5 + 6t. && (41) \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt in Abhängigkeit von t

$$\alpha = 1 + 27t,\ \beta = 2,\ \gamma = 3 + 6t \tag{42}$$

bzw. mit $\tau = 3t$

$$\alpha = 1 + 9\tau,\ \beta = 2,\ \gamma = 3 + 2\tau. \tag{43}$$

Jetzt müssen wir den Parameter τ so bestimmen, daß das Dreieck Δ senkrecht auf der Geraden g steht. Zwei Seiten des Dreiecks Δ werden durch die Vektoren $\vec{c} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{b}$ beschreiben. Ein Vektor der senkrecht auf diesen zwei Vektoren steht ist das Kreuzprodukt dieser zwei Vektoren und dieser Vektor muß dann parallel zum Richtungsvektor der Geraden g sein. Also haben wir

$$\vec{n} = (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 - 7\tau \\ -4 - 11\tau \\ 3 + 2\tau \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 + 2\tau \\ -5 - 2\tau \\ 1 + 2\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18\tau^2 - 3\tau + 11 \\ 18\tau^2 + 15\tau + 7 \\ 36\tau^2 + 72\tau + 2 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Dieser Vektor muß jetzt parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, was für $\tau = 0$ der Fall ist.

Damit haben wir als Ergebnis

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3. \tag{45}$$

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Die Schnittgerade g besteht aus allen Punkten, die sowohl auf der Ebene E_1 als auch auf der Ebene E_2 liegen. Also erhalten wir eine Darstellung für g als Lösung des Gleichungssystem

$$x + y + z + 1 = 0 \tag{46}$$
$$2x + y + 3z - 2 = 0. \tag{47}$$

Man erhält $x = 3 - 2z,\ y = -4 + z$ und mit $t = z$ folgt

$$x = 3 - 2t \tag{48}$$
$$y = -4 + t \tag{49}$$
$$z = t \tag{50}$$

bzw.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

(b) Die Ebene E enthalt die Gerade g und ist parallel zum Normalenvektor $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E_3. Damit erhalten wir die Parameterdarstellung

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Die Normalform der Ebenengleichung erhalten wir jetzt in dem wir aus der letzten Ebenengleichung die Parameter s und t eliminieren, dies geschieht durch Lösung des zur Ebenengleichung äquivalenten Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t + s & (53) \\ y &= -4 + t - s & (54) \\ z &= t + s. & (55) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E: \ 2x + 3y + z + 6 = 0. \tag{56}$$

(c) Die Gerade g' entsteht aus dem Schnitt Projektionsebene E mit der Ebene E_3, also der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y + z - 1 &= 0 & (57) \\ 2x + 3y + z + 6 &= 0 & (58) \end{aligned}$$

also

$$x = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}z, \ y = -\frac{8}{5} + \frac{1}{5}z. \tag{59}$$

Mit $z = 5t$ erhalten wir die Parameterdarstellung

$$g': \ \vec{x} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Alternativlösung: Die Projektionsebene E gehört zu dem Ebenenbüschel durch die Schnittgerade g der beiden EbenenE_1 und E_2. Die Gleichung von E hat deshalb die Form

$$x+y+z+1+\lambda(2x+y+3z-2) = 0 \text{ bzw. } (1+2\lambda)x+(1+\lambda)y+(1+3\lambda)z+1-2\lambda = 0. \tag{61}$$

Folglich hat der Normalenvektor von E die Form

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ 1 + 3\lambda \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Da aber $\vec{n}$ senkrecht auf Normalenvektor von E_3 steht gilt

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_3 = 1 + 2\lambda - 1 - \lambda + 1 + 3\lambda = 1 + 4\lambda = 0 \tag{63}$$

was zu

$$\lambda = -\frac{1}{4} \tag{64}$$

führt. Daraus erhält man die Darstellung

$$E : 2x + 3y + z + 6 = 0. \tag{65}$$

Die Gleichungen für g und g' erhält man analog wie oben.

Lösung zu Aufgabe T3

(a)

$$\begin{aligned}
G &= \lim_{n\to\infty} \left(1+n+n^2\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n^2\right)^{\frac{1}{n}} \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2}_{=1} \lim_{n\to\infty} \left(n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= 1\cdot 1^0 = 1
\end{aligned} \tag{66}$$

(b)

$$G = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2^0 = 1 \tag{67}$$

(c)

$$G = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \tag{68}$$

Zuerst Substituieren wir $q = 1-\left(\frac{1}{n}\right)$. Damit haben wir den Ausdruck

$$\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1-q^5}{1-q} \tag{69}$$

Da $q<1$ können wir die geometrische Summenformel $\frac{1-q^k}{1-q} = \sum_{i=0}^{k-1} q^k$ anwenden mit $k=5$ und erhalten dann

$$\begin{aligned}
G &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= (1+\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2+\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3+\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4 \\
&= 5
\end{aligned} \tag{70}$$

(d)

$$G = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+2-3+4-\ldots-(2n-1)+2n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1+2)+(-3+4)+\ldots+(-(2n-1)+2n)}{\sqrt{n^2+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+1+\ldots+1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= 1 \qquad (71)
\end{aligned}$$

(e)

$$G = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n+7}\right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{7}{n}}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \qquad (72)$$

(f) Zuerst untersuchen wir die Folge $f_n^* = (-1)^n$.

Man sieht, daß $f_n^* = \begin{cases} -1 \text{ für } n = 2k-1 \\ 1 \text{ für } n = 2k-1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Folglich liegen die Folgenglieder mit ungeraden Index in -1 und die Folgenglieder mit geraden Index in 1. Es kann also keine Zahl g derart geben, daß etwa außerhalb von $g \pm \frac{1}{2}$ nur endlich viele Folgenglieder liegen. Also divergiert die Foge f_n^*.

Mit $f_n^* = (-1)^n$ und $f_n^\times = \frac{1}{n}$ gilt $f_n = f_n^* \cdot f_n^\times$. Die Folge f_n^* ist eine divergente aber beschrnkte Folge, während $f_n^\times$ eine Nullfolge ist. Folglich konvergiert die Folge f_n und hat den Grenzwert

$$G = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0. \qquad (73)$$

Grenzwerte von Zahlenfolgen

Eine Aufzählung von Zahlen $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n,\ \dots$ nennt man **Zahlenfolge** (Kurzschreibweise: (a_n)). (

(a) **Nullfolge:**Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge**, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ existiert, so daß $|a_n| < \epsilon$ ist für alle $n \geq N(\epsilon)$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) **Grenzwert:** Die Folge (a_n) hat den **Grenzwert** a, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

In diesen beiden Fällen bezeichnet man die Folgen als **konvergent**. Eine Folge die nicht konvergent ist heißt **divergent**.

(c) **Uneigentlicher Grenzwert:** Man sagt, daß die Folge (a_n) den **uneigentlichen Grenzwert** ∞ habe, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ existiert, so daß $a_n > \dfrac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.
Man sagt, daß die Folge (a_n) den **uneigentlichen Grenzwert** $-\infty$ habe, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ existiert, so daß $a_n < -\dfrac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.

(d) **Beschränkte Folgen:** Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn es eine endliche Zahl K gibt, so daß für alle n gilt $|a_n| \leq K$.

(e) Eine Folge (a_n) heißt $\begin{cases}\textbf{nach oben}\\ \textbf{nach unten}\end{cases}$ **beschränkt**, wenn für alle a_n die Ungleichung $\begin{cases} a_n \leq K \\ a_n \geq K \end{cases}$ gilt.

(f) Eine Folge (a_n) heißt **monoton** $\begin{cases}\textbf{wachsend}\\ \textbf{fallend}\end{cases}$, wenn $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \end{cases}$ gilt.

Merkregel:

Jede nach $\begin{cases}\text{oben}\\ \text{unten}\end{cases}$ beschränkte und monoton $\begin{cases}\text{wachsende}\\ \text{fallende}\end{cases}$ Folge ist konvergent.

Rechenregeln für Zahlenfolgen

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ folgt:

(a) $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$ für $n \to \infty$ und $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ konstant.

(b) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ für $n \to \infty$.

(c) Falls $b \neq 0$ ist, strebt $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ für $n \to \infty$.

(d) Existiert die Potenz a^α, so strebt $(a_n)^\alpha \to a^\alpha$ für $n \to \infty$.

(e) Existiert die Potenz α^a, so strebt $\alpha^{a_n} \to \alpha^a$ für $n \to \infty$.

(f) Existiert die Potenz a^b, so strebt $(a_n)^{b_n} \to a^b$ für $n \to \infty$.

(g) Ist (c_n) beschränkt und (a_n) eine Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)$ eine Nullfolge.

Einige wichtige Zahlenfolgen und ihre Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(d) Für $q > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ für beliebiges q

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$