UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
12. Dezember 2006

Lösungen zum 8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1

(a) Wir zeigen die Behauptung $n_k \geq k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion. Nach Voraussetzung wissen wir, daß die Folge (n_k) streng monoton wachsend ist, d.h. es gilt $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$. Zu zeigen ist jetzt $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) **Induktionsanfang:** $k = 1 : n_1 \geq 1$. Die Behauptung ist erfüllt.

(ii) **Induktionsvoraussetzung:** Es gelte $n_k \geq k$ für ein $k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}$.

(iii) **Induktionsschluß:** $k \to k+1$: Da die Folgenglieder n_k natürliche Zahlen sind gilt $n_{k+1} > n_k$. Daraus folgt dann $n_{k+1} \geq n_k + 1 > k + 1$. Somit ist die Behauptung bewiesen.

(b) Nach Voraussetzung konvergiert die Folge (a_n) gegen den Grenzwert g, d.h. zu $\varepsilon > 0$ wähle ein $N(\varepsilon) > 0$ mit $|a_n - g| < \varepsilon,\ n \geq N(\varepsilon)$. Wähle jetzt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq N(\varepsilon)$. Da wir aus Teil (a) wissen, daß $n_k \geq k$ gilt, gilt dann für die Folge (b_k)

$$|b_k - g| = |a_{n_k} - g| < \varepsilon. \tag{1}$$

Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig wählen können folgt daraus die Behauptung.

(c) Wir haben die Äquivalentbeziehung

$$\begin{aligned} &H \text{ ist Häufungspunkt der Folge } (a_n) \\ &\Leftrightarrow \\ &\text{Es gibt eine Teilfolge } a_{n_k} \text{ mit } a_{n_k} \to H\ (k \to \infty) \end{aligned} \tag{2}$$

zu beweisen.

$\Rightarrow$ Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle eine n_k mit $|a_{n_k} - H| < \dfrac{1}{k}$ und $n_k > n_{k-1}$.
Es gilt dann $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \to H$.

$\Leftarrow$ In jeder Umgebung von H liegen fast alle Folgenglieder der Teilfolge (a_{n_k}), dies sind aber unendliche viele Glieder der Folge (a_n).

(d) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Somit existiert ein $k \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq k$ also $-k \leq a_n \leq k$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Jetzt betrachten wir die Menge

$$M := \{\kappa \in \mathbb{R} : \kappa \leq a_n \text{ für unendlich viele Folgenglieder}\}. \tag{3}$$

(i) Für $\kappa < -k$ gilt $\kappa \in M$, also ist M eine unendliche Menge, denn wegen $-k \leq a_n \leq k$ gilt die Ungleichung $\kappa \leq a_n$ für alle Folgenglieder.

(ii) Für $\kappa > k$ gilt $\kappa \notin M$, denn wegen $-k \leq a_n \leq k$ gilt die Ungleichung $\kappa \leq a_n$ für kein Folgenglied.

Daraus folgt dann, daß die Menge M nach oben beschränkt ist, z.B. durch $k+1$. Weiter wissen wir nach dem Vollständigkeitsaxiom, daß die Menge M eine kleinste obere Schranke hat, die wir mit $H =: \sup M$ bezeichnen.

(iii) Wir zeigen jetzt, daß H Häufungspunkt des Folge (a_n) ist. Wir wissen nach der Vorlesung (Kap. 4 Satz 4) daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\kappa_\varepsilon \in M$ mit der Eigenschaft $H - \varepsilon < \kappa_\varepsilon < H$ exitsiert. Da $\kappa_\varepsilon \in M$ ist, gilt $\kappa_\varepsilon \leq a_n$ für unendlich viele Folgenglieder, d.h $H - \varepsilon \leq a_n$ für unendlich viele Folgenglieder.
Für jedes $\varepsilon > 0$ kann die Ungleichung $H + \varepsilon \leq a_n$ nur für endlich viele Folgenglieder gelten, anderenfalls wäre $H+\varepsilon \in M$ und H dann nicht die kleinste obere Schranke.

Zusammenfassend haben wir $H - \varepsilon < a_n < H + \varepsilon$,d.h. $|a_n - H| < \varepsilon$ für unendlich viele Folgenglieder. Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist H nach Definition ein Häufungspunkt.

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Nach Definition von e und σ_n gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \tag{4}$$

$$< \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n \cdot n!}\,; \tag{5}$$

damit ist die Abschätzung von σ_n nach unten gezeigt. Weiter gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{(n+1)!}\,, \tag{6}$$

womit auch die Abschätzung nach oben bewiesen ist.

(b) Aus Aufgabe H3 (e) vom 7. Übungsblatt wissen wir, dass

$$t_n \leq e \leq t_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich ergibt sich

$$e - t_n \leq t_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - t_n = \frac{t_n}{n} \leq \frac{e}{n}. \tag{8}$$

Gemäß **a)** gilt $e < \sigma_1 + \frac{1}{1\cdot 1!} = 3$, also folgt $e - t_n < 3/n$.

Nun noch zur Abschätzung nach oben: Mit dem binomischen Satz ergibt sich für $n \geq 2$

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}. \tag{9}$$

Für $n \geq 2$ und $2 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1 - \frac{1}{n}}{k!}. \tag{11}$$

(Die Voraussetzung $k \geq 2$ braucht man für die letzte Abschätzung.)

Damit ergibt sich nun

$$t_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1 - \frac{1}{n}}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sigma_n - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < \sigma_n - \frac{1}{2n} < e - \frac{1}{2n}. \tag{12}$$

Die Ungleichung ist jetzt für $n \geq 2$ gezeigt. Dass sie auch für $n = 1$ gilt, sieht man leicht ein: $t_1 = 2 < e - \frac{1}{2}$, denn $e > \sigma_2 = \frac{5}{2}$.

Lösung zu Aufgabe H3 Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge (x_n) wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < x + \frac{1}{n}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwischen diesen beiden reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt; es gibt also ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x < x_n < x + \frac{1}{n}$.
Diese Folge konvergiert gegen x. Dies folgt aus $x \leq x_n \leq x + \frac{1}{n}$ und $x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Lösung zu Aufgabe H4

(a) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1. \tag{13}$$

Folglich erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{i^k}{k} = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m} \right) \tag{14}$$

$$= i \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1} \right) + \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2} \right) \tag{15}$$

$$= i\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \cdots + \tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n-1}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + - \cdots + \tfrac{1}{4n} - \tfrac{1}{4n-2}\right) \tag{16}$$

$$= i \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\nu - 1} + \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu} \frac{1}{2\nu}. \tag{17}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergieren diese Summen für $n \to \infty$. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann gilt: s_{4n} konvergiert für $n \to \infty$. Für $m \in \{1,2,3\}$ gilt

$$s_{4n+m} = s_{4n} + \sum_{k=4n+1}^{4n+m} \frac{i^k}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{4n} \tag{18}$$

wegen $|i^k/k| = 1/k$. Also folgt: s_n konvergiert für $n \to \infty$, d. h. die Reihe ist konvergent.

(b) Mit a_k bezeichnen wir das Reihenglied. Zunächst zur Konvergenz:

$$|a_k| = \frac{1}{(2k+1)3^k} \leq \frac{1}{3^k} =: c_k. \tag{19}$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert, folgt die Konvergenz unserer Reihe (Majorantenkriterium).

Nach Definition von s_N und s gilt

$$|s_N - s| = \left| \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right| = \lim_{M\to\infty} \left| \sum_{k=N+1}^{M} a_k \right| \tag{20}$$

und für jedes $M \geq N+1$ gilt

$$\left| \sum_{k=N+1}^{M} a_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{M} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{3^k} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^k}. \tag{21}$$

Folglich ist auch

$$|s_N - s| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{N+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{N+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^N}. \tag{22}$$

Wenn es uns also gelingt, ein N zu finden mit

$$\frac{1}{2 \cdot 3^N} < \frac{1}{2} 10^{-6}, \tag{23}$$

so ist auch $|s_N - s| < \frac{1}{2}10^{-6}$. Wegen

$$\frac{1}{2 \cdot 3^N} < \frac{1}{2} 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad 3^N > 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{N/6} > 10 \tag{24}$$

ist dies sicherlich für $N/6 = 3$, also $N = 18$ erfüllt.