Lösung zu Aufgabe T1

(a) Gesucht ist die Reihensumme von $\ln(2) + \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Wir zerlegen jetzt die Folgenglieder $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ nach den Rechenregel, die für den Logarithmus gelten zu

$$\begin{aligned} a_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\ &= \ln((n+1)(n-1)) - \ln(n^2) \\ &= \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n). \end{aligned} \tag{23}$$

Für die N-te Partialsumme gilt dann

$$\begin{aligned} S_N &= \ln(2) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n) \\ &= \ln(2) + \ln(1) + \ln(3) - 2\ln(2) \\ &\quad + \ln(2) + \ln(4) - 2\ln(3) \\ &\quad + \ln(3) + \ln(5) - 2\ln(4) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \ln(N-3) + \ln(N-1) - 2\ln(N-2) \\ &\quad + \ln(N-2) + \ln(N) - 2\ln(N-1) \\ &\quad + \ln(N-1) + \ln(N+1) - 2\ln(N) \\ &= \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

(Beachte S_N stellte eine Teleskopsumme dar.)

Für die Reihensumme gilt dann

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) = \lim_{N\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} = 0. \tag{25}$$

(b) Wir untersuchen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}$.

(i) **Konvergenzuntersuchung:** Die Reihe ist wegen $(-1)^n$ alternierend, wir wenden also das Leibnizkriterium an und erhalten

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{n2^n} > \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = |a_{n+1}|, \\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} \to 0 \end{aligned} \tag{26}$$

(ii) **Fehlerabschtzung:** Sei S_N die N-te Partialsumme und $S = S_N + R_N$ die Summe der Reihe. Wir untersuchen jetzt den Reihenrest R_N für $N = 7$ und erhalten

$$R_7 \leq a_8 = \frac{1}{8 \cdot 2^8} = \frac{1}{8 \cdot 256} = \frac{1}{2048}. \tag{27}$$

Damit ist

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64} - \frac{1}{160} + \frac{1}{384} - \frac{1}{896} + R_7 = -0.4058 - F + R_7. \quad (28)$$

Dabei bezeichnet F den Fehler den man erhält wenn man den Dezimalbruch nach der vierten Stelle abbricht. Für diesen Fehler gilt $-0.004 \cdot 10^{-3} < -F < 0$. Außerdem gilt

$$0.4 \cdot 10^{-3} < R_7 < \frac{1}{2048} = 0.489 \cdot 10^{-3}. \quad (29)$$

Für den Gesamtfehler $R = R_7 - F$ gilt somit

$$0 < 0.4 \cdot 10^{-3} - 0.004 \cdot 10^{-3} < R < 0.489 \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-3} \quad (30)$$

also

$$S = -0,4058 + R \quad (31)$$

mit

$$0 < R < 0.5 \cdot 10^{-3}. \quad (32)$$

(c) (i) Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ ist nach dem Vergleichskriterium konvergent,denn es gilt:

* $\ln(n)^{\ln(n)} = e^{\ln(n)(\ln(\ln(n)))} = n^{\ln(\ln(n))}$.
* Für $n > 1618$ gilt $\ln(\ln(n)) > 2$ und deshalb $\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} < \frac{1}{n^2}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{e^n}$. ist konvergent, denn nach dem Wurzelkriterium gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e^n} = \frac{1}{e} < 1. \quad (33)$$

(iii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ist nach dem Vergleichskriterium divergent, denn wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gibt es ein n_0 derart, daß für $n > n_0$ die Ungleichung $\sqrt[n]{n} < 2$ gilt. Damit gilt für diese Indizes $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{2n}$. Da aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, divergiert auch obige Reihe.

(iv) Man beachte das $sin(n)$ nicht Null sein kann, da $n \in \mathbb{N}$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sin(n)}$ ist , da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden. Dies sieht man wie folgt

$$|a_n| \frac{\sqrt{n}}{|\sin(n)|} \geq \sqrt{n} \to \infty \text{ für } n \to \infty. \tag{34}$$

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Die Funktion e^x ist für alle $x \in \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion, während die Funktion e^{-x} für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton fallend ist. Für $x = 0$ gilt, daß die beiden Funktionen den gleichen Funktionswert, nämlich 1 haben. Damit haben wir, daß $e^{-x} > e^x$ für $x \in \mathbb{R}^-$ und $e^x > e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}^+$ ist.

(i) $x \in \mathbb{R}^-$: Es ist $e^{-x} > e^x$ bzw. $e^x + e^{-x} > 2e^x$ bzw. $e^x < \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

(ii) $x \in \mathbb{R}^-$: Es ist $e^x > e^{-x}$ bzw. $2e^x > e^x + e^{-x}$ bzw. $e^x > \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

(iii) $x = 0$: Es ist $e^x = e^{-x} = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1$.

(b) (i) **Monotonie:** Für $x \geq 0$ ist die Funktion $\cosh(x)$ streng monoton wachsend, denn für $0 \leq s < t$ gilt $e^t > e^s$ und $e^{s+t} > 1$. Daraus folgt dann $\dfrac{e^t - e^s}{e^{s+t}} < e^t - e^s$ bzw. $e^{-s} - e^{-t} < e^t + e^s$ bzw. $e^s + e^{-s} < e^t + e^{-t}$, also $\cosh(s) < \cosh(t)$. Da die Funktion $\cosh(x)$ eine gerade Funktion ist, d.h. es gilt $\cosh(x) = \cosh(-x)$ folgt daraus, daß die Fuinktion $\cosh(x)$ für $x < 0$ streng monoton fallend ist.

(ii) **Umkehrfunktion:** Die Funktion $y = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist für $x \geq 0$ streng monoton wachsend, besitzt also eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion. Aus der Definition von $\cosh(x)$ und wegen Teil (a) und (i) wissen wir, daß die Funktion bei $x = 0$ ihr Minimum hat mit dem Funktionswert $y = 1$. Also ist für alle $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 1$. Jetzt lsen wir $y = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ nach x auf.

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad | \cdot 2e^x \\ 2e^x y &= e^{2x} + 1 \\ e^{2x} - 2e^x y + y^2 &= y^2 - 1 \\ (e^x - y)^2 &= y^2 - 1 \\ |e^x - y| &= \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned} \tag{35}$$

Da $e^x > y = \cosh(x)$ für $x \geq 0$ können wir schreiben

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \tag{36}$$

bzw. nach dem Logaritmieren und Vertauschen von x und y

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{37}$$

Für $x < 0$ ist $cosh(x)$ streng monoton fallend und deshalb auch eine eindeutige bestimmte Umkehrfunktion, die man auf analogen Weg wie oben erhält, also

$$y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}). \tag{38}$$

(iii) Die Umkehrfunktion von $\cosh(x)$ wird mit **Area Cosinus hyperbolicus** *arcosh* genannt und wir haben zusammenfassend

$$y = arcosh(x) = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \text{für } x \geq 0 \\ \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) & \text{für } x < 0 \text{ Nebenzweig} \end{cases} . \tag{39}$$

Lösung zu Aufgabe T3

(a) Für $a := \sqrt[3]{8 + x}$ und $b := 2$ verwenden wir die Gleichung

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad \text{also} \quad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \tag{40}$$

und erhalten

$$\sqrt[3]{8 + x} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{8 + x}\,)^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8 + x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8 + x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8 + x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8 + x} + 4} . \tag{41}$$

Folglich ergibt sich

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8 + x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8 + x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12} . \tag{42}$$

(b) Gemäß binomischem Satz gilt

$$\left(1 + \frac{9}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{9}{x}\right)^k = 1 + 9 \cdot \frac{9}{x} + a_2 \left(\frac{9}{x}\right)^2 + \cdots + a_9 \left(\frac{9}{x}\right)^9 \tag{43}$$

mit $a_k = \binom{9}{k}$. Also ergibt sich

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{9} \left(\left(1 + \frac{9}{x}\right)^9 - 1 \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{9} \left(9 \cdot \frac{9}{x} + a_2 \left(\frac{9}{x}\right)^2 + \cdots + a_9 \left(\frac{9}{x}\right)^9 \right) \tag{44}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(9 + a_2 \left(\frac{9}{x}\right)^1 + a_3 \left(\frac{9}{x}\right)^2 + \cdots + a_9 \left(\frac{9}{x}\right)^8 \right) = 9 . \tag{45}$$

(c) Zur Abkürzung setzen wir $a := \sqrt{x^2 + x}$ und $b := \sqrt{x^2 - x}$. Dann ergibt sich

$$\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} - 2x = a - x + b - x = \frac{a^2 - x^2}{a + x} + \frac{b^2 - x^2}{b + x} = \frac{x}{a + x} + \frac{-x}{b + x} \tag{46}$$

$$= \frac{x(b + x) - x(a + x)}{(a + x)(b + x)} = \frac{x(b - a)}{(a + x)(b + x)} = \frac{x(b - a)(b + a)}{(a + x)(b + x)(b + a)} \tag{47}$$

$$= \frac{x(b^2 - a^2)}{(a + x)(b + x)(b + a)} = \frac{-2x^2}{(a + x)(b + x)(a + b)} . \tag{48}$$

Damit folgt wegen $a/x \to 1$ und $b/x \to 1$ (a und b sind von x abhängig) für $x \to \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\big(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}-2x\big) &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3}{(a+x)(b+x)(a+b)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{(a/x+1)(b/x+1)(a/x+b/x)} = \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2} = -\frac{1}{4}\,. \end{aligned} \tag{49}$$

(d) Dies ist wieder ein einfacher Fall:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8}{2} = 4\,. \tag{50}$$

Lösung zu Aufgabe T4 Diese Funktion ist nur in $x = \frac{1}{2}$ stetig.
Ist nämlich (x_n) eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, so gilt $f(x_n) = x_n$ oder $f(x_n) = 1 - x_n$ und wegen $x_n \to \frac{1}{2}$ und $1 - x_n \to 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ folgt $f(x_n) \to \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$ für $n \to \infty$.
Ist dagegen $x_0 \neq \frac{1}{2}$, so unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Nach Aufgabe 2 vom 8. Übungsblatt existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f(x_n) = x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \neq 1 - x_0 = f(x_0)$, d. h. es gilt nicht $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. (Man kann sich sogar überlegen, dass dieser Grenzwert nicht existiert.)
2. Fall: $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann ist $x_n := x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und damit gilt $f(x_n) = 1 - x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 - x_0 \neq x_0$, d. h. auch hier gilt nicht $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.