Aufgabe 1 2. Ü Klausur HMI WS 2006/07 / Lösung

a) Beweis von $1 < a_n \le 2$, $n = 1,2,\dots$ mit Induktion.

Ind. Anfang : $a_1 = 2$ ✓

Ind. schluss $(n \to n+1)$

Ind vor: Für ein $n \geq 1$ gilt $1 < a_n \le 2$ (1)

Ind beh: Es gilt $1 < a_{n+1} \le 2$.

Ind bew: (Rechnen mit Ungleichungen)

Aus (1) $\to$ $0 < a_n - 1 \le 1 \to -3 < a_n - 4 \le -2$

$$\to -\frac{1}{3} > \frac{1}{a_n - 4} \geq -\frac{1}{2}$$

$$(1) \to 0 < \frac{1}{3}(a_n - 1) < -\frac{a_n - 1}{a_n - 4} < \frac{1}{2}(a_n - 1) \le \frac{1}{2}$$

$$\to \underline{1 < a_{n+1} \le \frac{3}{2} < 2} \quad ✓$$

b) $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{6}{5}$: $a_1 > a_2 > a_3$

Vermutung $\underline{a_{n+1} < a_n \quad , n = 1,2,\dots}$ (2)

$$n \geq 2: \quad a_n - a_{n+1} = 1 - \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 4} - \left(1 - \frac{a_n - 1}{a_n - 4}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{3}{(a_{n-1} - 4)(a_n - 4)}}_{> 0 \text{ (nach a))}} (a_{n-1} - a_n)$$

Hieraus folgt mittels Induktion, dass (2) richtig ist.

Die Folge (a_n) ist somit monoton fallend und (nach a)) nach unten beschränkt: Damit ist sie konvergent (Satz der Vorlesung)

c) $g := \lim_{n \to \infty} a_n$. Für g gelten: $g \in [1,2]$ und (aus der Rekursionsformel) $g = 1 - \frac{g-1}{g-4} \Leftrightarrow g^2 - 4g + 3 = 0 \to \underline{\underline{g = 1}}$

Aufgabe 2   2. Ü Klausur HMI WS2006/07 | Lösung

b) 1) $\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}} = (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{1}{n+1} =: (-1)^n a_n$ mit $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$

Es ist $a_n = \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{1}{n+1}$ positiv für $n \in \mathbb{N}$

und monoton fallend (nach Vorlesung / Ü ist $(1+\frac{1}{n})^n \nearrow$),

und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$.

Nach dem Leibniz Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

b) 2) $\frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(nach Vorlesung) divergent ist, ist die Reihe b) 2) nach dem Minorantenkriterium divergent.

---

a) Es ist $\frac{1}{2} < \sqrt[k]{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}} < \sqrt[k]{2 \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} \sqrt[k]{2}$.

Da (nach Vorlesung) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$

gelten, folgt

$$\limsup \sqrt[k]{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$$

Der Konvergenzradius der vorgelegten Potenzreihe ist also $r = 2$.

oder: Es gilt für $a_k = \left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)\frac{1}{k}$:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k+1}{k} 2 \cdot 3 \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 1} \xrightarrow[(k\to\infty)]{} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Aufgabe 3 2. Ü Klausur HM I WS 2006/07 / Lösung

a) $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist beliebig, fest.

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0-} f_m(x) = \begin{cases} +\infty, & m = 2k \\ -\infty, & m = 2k+1 \end{cases}$ $(k = 0,1,2,\dots)$ (1), da

$$\lim_{x\to 0-} e^{-\frac{1}{x}} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^m} = \begin{cases} +\infty, & m \text{ gerade } (\neq 0) \\ -\infty, & m \text{ ungerade} \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x}} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to\infty} t^m e^{-t} = 0 \quad \text{(Vorlesung, 14.2)} \quad (2)$$

Wegen (1), (2) existiert $\lim\limits_{x\to 0} f_m(x)$ nicht: f_m ist nicht stetig nach 0 fortsetzbar.

b) Man rechnet aus mit $f_0(x) = e^{-\frac{1}{x}}$: $f_0'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$,

$$f_0''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x}}, \quad f_0'''(x) = \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

Nach a) ((2)) gelten: $\lim\limits_{x\to 0+} f_0^{(j)}(x) = 0$, $j = 1,2,3$.

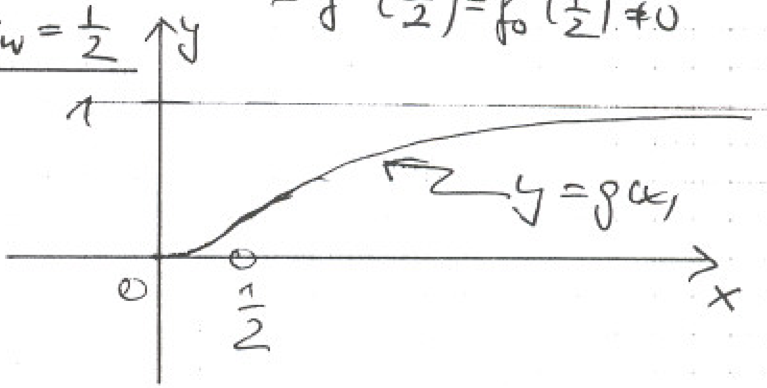
c) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f_0'(x) \overset{b)}{=} 0 \cdot 1 = 0$

$x_W > 0$ bezeichne die Abszisse von Wendepunkten: Es müssen gelten: $g''(x_W) = 0$, $g'''(x_W) \neq 0$

$\Updownarrow$ b)

$\frac{1}{x_W^4} = \frac{2}{x_W^3} \iff x_W = \frac{1}{2}$

$\overset{b)}{\Rightarrow} g'''(\frac{1}{2}) = f_0'''(\frac{1}{2}) \neq 0$



Aufgabe 4

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$ hat Polstellen für $x^2+x-2 = (x+2)(x-1) = 0$

also $x_1 = -2,\ x_2 = 1$

$\Rightarrow$ Ansatz: $\frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2}{x-1} = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow a_1(x-1) + a_2(x+2) = x+1$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_1 + a_2 = 1 \\ -a_1 + a_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{2}{3}$$

Also: $f(x) = \frac{1/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1}$ (*)

(b) Wir schreiben $f(x)$ aus Gl. (*) wie folgt

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{9}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})} - \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})\right]^k - \frac{4}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})\right]^k$$

für $\left|\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})\right| < 1$ also $\left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$ (geometr. Reihe)

$$= \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k - 2\right]\left[\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})\right]^k$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left((-1)^k - 2\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^k$$

(c) 1. Lösungsweg: Wg. der Anwendung der geometr. Reihe muß gelten (vgl. b)

$$\left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

2. Lösungsweg: $f(x)$ hat die Pole $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Für $x_0 = -1/2$ gilt $|x_1 - x_0| = 3/2$, $|x_2 - x_0| = 3/2 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

3. Lösungsweg: $a_k = \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left((-1)^k - 2\right)$

$$\sqrt[k]{|a_n|} = \begin{cases} \left(\frac{2}{9}\right)^{1/k}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3^{1/k} & k = 2n+1 \\ \left(\frac{2}{9}\right)^{1/k}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1^{1/k} & k = 2n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad = \begin{cases} 2/3 & k = 2n+1 \\ 2/3 & k = 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\lim (|a_k|)^{1/k}} = \frac{3}{2}$$