17.10.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Nichtlineare Analysis

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Caratheodory Funktion)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir nennen eine Abbildung $A\colon \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Caratheodory-Funktion, falls folgende zwei Bedingungen gelten:

1. Für jeden festen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ ist die Abbildung
$$\omega \mapsto A(\omega, x)\ \mathcal{L}^n\text{-messbar auf } \Omega.$$

2. Für jedes feste $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung
$$x \mapsto A(\omega, x) \text{ stetig auf } X.$$

Zeigen Sie: Ist nun eine Lebesgue-messbare Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ gegeben, dann ist auch die Funktion
$$f(u)(\cdot) := A(\cdot, u(\cdot)) \text{ Lebesgue-messbar auf } \Omega.$$

Aufgabe 2 (Beweis von Lemma I.5(iii)+(iv))

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge mit $\mathcal{L}^n(\Omega) > 0$ und setze $X := L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, sowie die Normfunktion $f(x) := \|x\|_{L^p(\Omega)}$ für $x \in X$.

1. Betrachte $p = 1$: Berechnen Sie für alle $x_0, y \in X$ die Richtungsableitung $\partial_y f(x_0)$ und zeigen Sie anschließend, dass die Normfunktion f an keiner Stelle $x_0 \in X$ Fréchet-differenzierbar ist.

2. Betrachte nun $p \in (1, \infty)$: Zeigen Sie, dass die Normfunktion f an jeder Stelle $x_0 \in X \setminus \{0\}$ Fréchet-differenzierbar ist.

Aufgabe 3 ()

Seien $\emptyset \neq \Omega \subset\subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge, $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und $\varphi \in C^{1,\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon C^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ gegeben durch
$$f(u) := -\Delta u + \varphi \circ u,\ u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$$
Fréchet-differenzierbar ist und berechnen Sie die Fréchet-Ableitung.