25.10.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Nichtlineare Analysis

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Beweis von Proposition I.17)

Beweisen Sie Proposition I.17 der Vorlesung, d.h. das Folgende: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $\emptyset \neq U \subseteq X$ eine offene und konvexe Teilmenge, sowie $f \in C^1(U, X')$ eine Funktion. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktion f ist eine Gradienten-Abbildung.

(ii) Das Wegintegral
$$\int_\gamma f := \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\mathrm{d}t$$
ist für stetig-differenzierbare Wege $\gamma\colon [0,1] \to U$ weg-unabhängig.

(iii) Für alle Punkte $x \in U$ ist
$$f'(x) \in L(X, X') \cong L_2(X, \mathbb{R})$$
symmetrisch.

Aufgabe 2 (Nemytski-Operatoren)

Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum von Funktionen $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir den Nemytski-Operator durch
$$F\colon X \to X,\ \varphi \mapsto f(\cdot, \varphi(\cdot)).$$
Wir betrachten nun zwei Beispielfälle von Banachräumen.

1. Sei $X := C^0([0,1], \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie: Ist die Funktion f stetig auf $U \times \mathbb{R}$ und stetig-differenzierbar bzgl. der zweiten Komponente, dann ist der Nemytski-Operator F Fréchet-differenzierbar auf X. Stellen Sie in diesem Fall eine Formel für die Fréchet-Ableitung von F auf.

2. Sei
$$X := \left\{\varphi \in C^0([0,\infty), \mathbb{R}) : x \mapsto \varphi(x)\mathrm{e}^{-x} \text{ ist beschränkt auf } [0,\infty)\right\}$$
ausgestattet mit der Norm
$$\|\varphi\|_X := \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\varphi(x)\mathrm{e}^{-x}\right| \text{ für } \varphi \in X.$$
Vergewissern Sie sich erstmal, dass $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum ist. Finden Sie anschließend eine stetig-differenzierbare Funktion f so, dass der zugehörige Nemytski-Operator nicht mehr überall Fréchet-differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (Höhere Regularität beim inversen Funktionensatz und Satz über implizit-definierte Funktionen)

Zeigen Sie, dass wir bei stärkerer Vorgabe der Regularität an die Funktion f im inversen Funktionensatz bzw. im Satz über implizit-definierte Funktionen auch höhere Regularität an die Funktion g erhalten (gegebenenfalls durch Verkleinern der jeweiligen offenen Umgebungen). Genauer sollen Sie zeigen:

1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $\emptyset \neq U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $f \in C^m(U, X)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und für einen Punkt $x_0 \in U$ sei $Df(x_0) \in L(X, X)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0) \subseteq U$ um x_0 und $V(y_0) \subseteq f(U)$ um $y_0 := f(x_0)$ so, dass
$$f\colon U(x_0) \to V(y_0)$$

bijektiv ist und weiter existiert eine Funktion $g \in C^m(V(y_0), U(x_0))$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_{U(x_0)}$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_{V(y_0)}$, sowie

$$Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}.$$

2. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ drei Banachräume, $\emptyset \neq W \subseteq X \times Y$ eine offene Teilmenge, $f \in C^m(W, Z)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und für einen Paar $(x_0, y_0) \in W$ gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und

$$D_y f(x_0, y_0) \in L(Y, Z)$$

ist ein Isomorphismus. Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0) \subseteq X$ um x_0 und $V(y_0) \subseteq Y$ um y_0 mit $U(x_0) \times V(y_0) \subseteq W$ so, dass für alle Punkte $x \in U(x_0)$ es genau ein Element $y \in V(y_0)$ gibt mit $f(x, y) = 0$. Betrachte die Funktion $g\colon U(x_0) \to V(y_0), x \mapsto y$, dann ist $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U(x_0)$ und $g \in C^m(U(x_0), V(y_0))$, sowie

$$Dg(x_0) = -D_y f(x_0, y_0)^{-1} D_x f(x_0, y_0).$$