07.11.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Nichtlineare Analysis

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Fredholm-Funktionen unter kompakter Störung)

Beweisen Sie, dass Fredholm-Abbildungen abgeschlossen sind unter kompakter Störung, das bedeutet: Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, sowie $f, g \in C^1(U, Y)$ zwei Funktionen, wobei f eine Fredholm-Abbildung und g kompakt sei. Dann ist auch die Summe $f + g \colon U \to Y$ eine Fredholm-Abbildung.

Aufgabe 2 (Analytische Abhängigkeit vom Anfangswert)

Sei $\alpha \geq 0$. Gegeben sei die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$(*) \begin{cases} B''(y) + \left(\frac{d+1}{y} + \frac{y}{2}\right) B'(y) - \left(\frac{d-1}{y^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2y)^{2n}}{(2n+1)!} B(y)^{2n+1} - \frac{1}{2} B(y)\right) = 0 \text{ für alle } y > 0 \\ B(0) = \alpha. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $(*)$ eine Lösung B_α in $L^\infty(0, \infty)$ existiert. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
Schritt 1.: Zeigen Sie, dass die folgende Fixpunktgleichung für $(*)$ erfüllt ist:

$$B(y) = \alpha + \int_0^y s^{-1-d} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^s t^{d+1} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \left[\frac{d-1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n+1)!} B(t)^{2n+1} - \frac{1}{2} B(t)\right] \mathrm{d}t\mathrm{d}s =: T_\alpha B(y)$$

für $y \geq 0$.
Schritt 2.: Zeigen Sie, dass T_α eine kontraktive Selbstabbildung auf $B_r(\alpha) \subseteq L^\infty(0, \varepsilon)$ für geeignetes $r, \varepsilon > 0$ und nutzen Sie anschließend den Fixpunktsatz von Banach.
Schritt 3.: Weisen Sie mit der analytischen Version vom Satz über implizit-definierte Funktionen nach, dass diese Lösung analytisch vom Anfangswert α abhängt.
Schritt 4.: Schließe Sie den Beweis ab.

Aufgabe 3 (Satz von Sard)

Beweisen Sie die folgende Aussage: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine C^∞-Funktion, sowie $D \subseteq U$ die Menge aller kritischen Punkte der Funktion f. Dann hat die Bildmenge $f(D) \subseteq \mathbb{R}^m$ Lebesgue-Maß null.

Beweisanfang: Machen Sie dazu eine Induktion $n \in \mathbb{N}_0$.
O.B.d.A.: Sei $p > 0$.
Induktionsanfang $n = 0$: Dann ist $\mathbb{R}^0$ ein Punkt, also $f(U)$ höchstens ein Punkt, demnach stimmt die Aussage.
Für den Induktionsschritt: Sei $D_i \subseteq U$ die Menge der Punkte $u \in U$, wo alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq i$ verschwinden. Damit bilden die $(D_i)_i$ eine absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen

$$D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$$

von U. Wir müssen nun zeigen:

1. $f(D \backslash D_1)$ ist dünn, d.h. ist eine Nullmenge.
2. $f(D_i \backslash D_{i+1})$ ist dünn.
3. $f(D_k)$ ist dünn für große $k \in \mathbb{N}$.