

Nichtlineare Analysis

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Index von komplexen Polynomen)

Seien $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt. Berechnen Sie den Index $\text{ind}(p, z_0)$.

Aufgabe 2 (Formel für den Abbildungsgrad)

Seien $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, ein offenes Intervall, sowie $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie die folgende Formel für den Abbildungsgrad

$$\deg(f, I, y) = \frac{1}{2} [\text{sign}(f(b) - y) - \text{sign}(f(a) - y)]$$

für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{f(a), f(b)\}$.

Aufgabe 3 (Lösen per Homotopieverfahren)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x + y) &= 0, \\ x - 2y + \cos(x + y) &= 0 \end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem eine Lösung $(x, y) \in B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ hat für Radien $r > \frac{\sqrt{6}}{5}$.