21.11.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Nichtlineare Analysis

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Produktformel für den Abbildungsgrad)

Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $f(\partial B_r(0)) \subseteq \partial B_r(0)$ für ein Radius $r > 0$, weiter sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgende Produktformel für die m-fache Verkettung $f^m := f \circ f \circ \ldots \circ f$

$$\deg(f^m, B_r(0), 0) = \deg(f, B_r(0), 0)^m .$$

Aufgabe 2 (Homotopieklassen-Abhängigkeit)

Sei (f, D, y) ein zulässiges Tripel. Beweisen Sie, dass die Zahl $\deg(f, D, y)$ nur von der Homotopieklasse von $f|_{\partial D}$ abhängt.

Aufgabe 3 (Zusammenhang zwischen Windungszahl und Kroneckerformel)

Beweisen Sie, dass die Formel für die Windungszahl (aus der Funktionentheorie) ein Spezialfall der Kroneckerformel ist.

Aufgabe 4 (Fixpunktsatz von Brouwer für kompakte Abbildungen in Banachräumen)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $\emptyset \neq K \subseteq X$ eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass jede kompakte Abbildung $g \in C^0(K, K)$ einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 5 (Ham-Sandwich Theorem)

Seien $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ drei messbare Mengen mit endlichem Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^3(A_i) < \infty$ für $i = 1, 2, 3$. Beweisen Sie, dass dann ein Halbraum H mit $\mathcal{L}^3(A_i \cap H) = \mathcal{L}^3(A_i \backslash H)$ für $i = 1, 2, 3$ existiert.
Hinweis: Betrachten Sie auf der $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ die stetige Funktion $f\colon S^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f^{(i)}(\cos(\theta)\omega, \sin(\theta)) = \mathcal{L}^3(\{x \in A_i \colon \langle x, \omega \rangle < \tan(\theta)\})$$

für $i = 1, 2, 3$, wobei $\omega \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist.