04.12.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Nichtlineare Analysis

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Randwertproblem)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand und $f \in C^0\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$ eine Funktion mit sub-linearem Wachstum in u und Du, d.h.

$$|f(x,z,p)| \leq C\left(1 + |z|^\alpha + |p|^\alpha\right)$$

für eine Konstante $C > 0$ und einem $\alpha \in [0,1)$. Formulieren Sie das Randwertproblem

$$\text{(RwP)} \begin{cases} -\Delta u(x) = f\left(x, u(x), Du(x)\right) \text{ für } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

als ein Fixpunktproblem in $W_0^{1,2}(\Omega)$ um und zeigen Sie die Existenz einer Lösung von (RwP).

Aufgabe 2 ()

Seien $c_0 := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon x \text{ ist eine Nullfolge}\right\}$ der Banachraum der reellen Nullfolgen ausgestattet mit $\|\cdot\|_{c_0} = \|\cdot\|_{l^\infty}$ und $f \colon c_0 \to c_0$ die Funktion definiert durch $f(x)_i = x_i^3$ für alle $i \in \mathbb{N}$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Zeigen Sie folgende drei Eigenschaften der Funktion f:

- Die Funktion f ist in jedem Punkt $x \in c_0$ differenzierbar.
- Die Funktion f ist nicht kompakt.
- Die Ableitung $Df(x)$ ist für alle $x \in c_0$ kompakt.