12.12.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

# Nichtlineare Analysis

## 8. Übungsblatt

### Aufgabe 1 (Eulerscher Knickstab)

Ein elastitscher Stab der Länge Eins ($l = 1$) sei mit dem einen Ende drehbar im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ gelagert, das andere Ende sei frei beweglich auf der positiven $y$-Achse. Durch Anhängen eines Gewichtes $p = mg > 0$ werde der Stab verbogen.

Wir beschreiben den Stab durch eine längentreue Abbildung $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ s \mapsto (x(s), y(s))$ mit $|c'(s)| = 1$ für alle $s \in [0,1]$, mit den Randbedingungen $x(0) = y(0) = 0,\ x(1) = 0$. Die potentielle Energie $E$ des Systems ist die Summe der Biegeenergie des Stabes und der Lageenergie des Gewichtes, das heißt

$$E(c) = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \kappa(s)^2 \mathrm{d}s + py(1),$$

wobei $\kappa(s) = |c''(s)|$ für $s \in [0,1]$ die Krümmung und $\sigma > 0$ eine Konstante (abhängig von Material und Querschnitt des Stabes) ist. Wir machen den Ansatz

$$c(s) = \int_0^s (\sin(\theta(t)),\ \cos(\theta(t)))\, \mathrm{d}t,$$

wobei $\theta(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ für $t \in [0,1]$ der gegen den Uhrzeigersinn gemessene Winkel ist, den $c'$ mit der positiven $y$-Achse einschließt. Als Funktion von $\theta$ erhalten wir nun

$$E(\theta) = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \theta'(s)^2 \mathrm{d}s + p \int_0^1 \cos(\theta(s))\, \mathrm{d}s,$$

und die Randbedingung lautet

$$\int_0^1 \sin(\theta(s))\, \mathrm{d}s = 0.$$

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

(1) Zeigen Sie, dass eine Gleichgewichtslage durch die Gleichungen

$$(*) \begin{cases} \theta'' + \lambda^2 \sin(\theta) & = 0 \\ \theta'(0) = \theta'(1) & = 0 \end{cases}$$

mit $\lambda^2 = \frac{p}{\sigma}$ beschrieben wird.

(2) Die Funktion $\theta \equiv 0$ ist die triviale Lösung von $(*)$. Untersuchen Sie, für welche $\lambda$ (bzw. für welche Knicklasten $p = \sigma\lambda^2$) Verzweigungen auftreten und zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm.

### Aufgabe 2 (Randwertproblem)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^2$-Rand. Gegeben sei das Randwertproblem

$$(\mathrm{RwP}) \begin{cases} \Delta u + \lambda g(u) & = 0 \text{ in } \Omega, \\ u & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

unter den Annahmen:

$$g(0) = 0,\ g'(0) \neq 0,\ g''(0) = 0,\ g'''(0) \neq 0.$$

Skizzieren Sie die Verzweigungskurve bei einem einfachen Eigenwert $\mu = \lambda_0 g'(0) > 0$ von $-\Delta$, je nach Vorzeichen von $g'''(0)$.