19.12.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Nichtlineare Analysis

9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Lavrentiev-Phänomen)

Gegeben sei das Funktional

$$I(u) := \int_0^1 \left(x - u(x)^3\right)^2 u'(x)^6 \mathrm{d}x$$

und die Menge

$$A := \{u \in \mathrm{Lip}\,([0,1]) : u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 1\}\,.$$

Zeigen Sie:

(1) Sei $a \in (0,1)$. Dann existiert eine Konstante c_0 (unabhängig von a) so, dass

$$I(u) \geq \frac{7^2}{2^6} \int_0^a x^2 u'(x)^6 \mathrm{d}x \geq c_0$$

für alle $u \in \mathrm{Lip}\,([0,1])$ mit $u(x) \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ für $x \in [0,a]$ und $u(a) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}$ gilt.

(2) Für jede Funktion $u \in \mathrm{Lip}\,([0,1])$ mit $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$ existiert ein $a \in (0,1)$ mit $u(x) \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ für alle $x \in [0,a]$ und $u(a) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}$.

(3) Es gilt:

$$\inf\{I(u) \colon u \in A\} > \inf\left\{I(u) \colon u \in W^{1,1}\left((0,1)\right) \text{ mit } u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 1\right\}.$$

Hinweis: Sie können ohne weiteren Beweis benutzen, dass jede Lipschitz-stetige Funktion fast überall differenzierbar ist. (siehe z.B. I.P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Kapitel 8, Paragraph 3, Korollar 1.)