16.01.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Nichtlineare Analysis

10. Übungsblatt

Aufgabe 1 ((Nicht-)Unterhalbstetige Funktionale I)

1. Zeigen Sie, dass die Menge

$$W^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, S^2\right) := \left\{u \in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right) : |u(x)| = 1 \text{ fast überall}\right\}$$

   schwach abgeschlossen im Sobolevraum $W^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |Du(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \lambda \int_{B_1(0)} \langle u(x), \partial_1 u(x) \times \partial_2 u(x)\rangle \,\mathrm{d}x$$

   schwach unterhalbstetig ist auf der Menge $W^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, S^2\right)$ für $|\lambda| \leq 1$.

Aufgabe 2 ((Nicht-)Unterhalbstetige Funktionale II)

Sei $I = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Gegeben seien auf dem Sobolevraum $W^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$ die Funktionale

$$I(u) := \int_0^1 \left(|u'(x)|^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}x,$$

$$E(u) := \int_0^1 \left[\left(|u'(x)|^2 - 1\right)^2 + |u(x)|^2\right] \mathrm{d}x$$

unter den Nullrandbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Zeigen Sie:

(1) Es ist $\inf I(u) = \min I(u) = 0$.

(2) Es ist $\inf E(u) = 0$, allerdings wird dieses nicht angenommen.

(3) Weder I noch E sind unterhalbstetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I, $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ schwach*-Konvergenz in $L^\infty(I, \mathbb{R})$.