

Nichtlineare Analysis

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Eindeutige schwache Lösung)

Setze $H := W_0^{1,2}(0, 1)$ mit Norm

$$\|u\|_H := \|u'\|_{L^2(0,1)} \text{ für } u \in H.$$

Weiter sei $f \in L^2(0, 1)$ und gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \begin{cases} -u'' + u^3 = f \text{ auf } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ziel soll es sein zu zeigen, dass eine eindeutige schwache Lösung von (*) in H existiert. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- (1) Stellen Sie die schwache Formulierung von (*) auf.
- (2) Formulieren Sie ein zu (*) passendes Funktional I .
- (3) Zeigen Sie, dass das Funktional I schwach unterhalbstetig ist. Nutzen Sie hierbei die kompakte Einbettung von H in $C^0[0, 1]$ aus.
- (4) Zeigen Sie, dass das Funktional I schwach koerziv und strikt konvex ist. Nutzen Sie hierbei die stetige Einbettung von H in $L^4(0, 1)$ aus.
- (5) Folgern Sie nun, dass das Problem (*) eine eindeutige schwache Lösung in H besitzt.