29.01.2017
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Nichtlineare Analysis

12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Sobolev-Ungleichung)

Sei $p \in (1, d)$ und setze $q := \frac{dp}{d-p}$. Wir wollen das Funktional

$$I(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^p \, \mathrm{d}x$$

in der Menge

$$\mathcal{C}_{d,p} := \left\{ u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right) : \, \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 1 \right\}$$

minimieren.

Bestimmen Sie die rotationssymmetrischen, positiven Lösungen $u = g(r)$ der zu diesem Variationsproblem gehörigen Euler-Lagrange-Gleichung.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Radon-Maßen)

Setze die Folgenglieder

$$u_n(x) := \begin{cases} nx \text{ für } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 2n\,(1 - n\,|x|)\,x \text{ für } \frac{1}{2n} < |x| < \frac{1}{n} \\ 0 \text{ für } |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie die zwei Konvergenzaussagen als Radon-Maße:

(1) $\mathcal{L}^d \llcorner \det\left(Du_n\right) \to 0$ für $n \to \infty$.

(2) $\mathcal{L}^d \llcorner |\det\left(Du_n\right)| \to \frac{\omega_d}{2^{d-1}} \delta_0$ für $n \to \infty$, wobei $\omega_d := \mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right)$ das Lebesgue-Maß vom d-dimensionalem Einheitsball und δ_0 das Dirac-Maß im Ursprung ist.