Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
16.04.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Wir lösen das gegebene lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ohne Spaltenpivotisierung.
Zur Elimination des Elements a_{21} multiplizieren wir die erste Zeile mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{3}{-1} = 3$ und addieren diese zur zweiten Zeile:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Im nächsten Eliminationsschritt wird die erste Zeile mit $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -1$ multipliziert und zur dritten Zeile addiert und anschließend die erste Zeile mit $-\frac{a_{41}}{a_{11}} = 2$ multipliziert und zur vierten Zeile addiert. Dies liefert

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & -8 & 9 \end{array}\right].$$

Danach multiplizieren wir die zweite Zeile mit $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{3}{2}$ und addieren sie zur dritten Zeile und anschließend multiplizieren wir die zweite Zeile mit $-\frac{a_{42}}{a_{22}} = -\frac{5}{2}$ und addieren sie zur vierten Zeile. Dies liefert

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & -8 & 9 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 24 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & -36 \end{array}\right].$$

Wir erhalten durch Multiplikation der dritten Zeile mit $-\frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{4}{6}$ und anschließender Addition zur vierten Zeile

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 24 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & -36 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{3} & -20 \end{array}\right].$$

An dieser Stelle endet der Gauß-Algorithmus. Das in der Aufgabenstellung gegebene lineare Gleichungssystem ist äquivalent zu $A^{(4)}x = b^{(4)}$ mit

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}, \qquad b^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \\ 24 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Da $A^{(4)}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, erhält man durch Rücksubstitution

$$\begin{aligned} x_4 &= -20 \cdot \frac{3}{20} = -3, \\ x_3 &= \frac{24 + 8x_4}{6} = 0, \\ x_2 &= \frac{18 + 8x_4 - 4x_3}{2} = -3, \\ x_1 &= -3 - 3x_4 + x_3 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist die Lösung des linearen Gleichungssystems durch $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ gegeben.

Aufgabe 2: Um die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A zu erhalten, führen wir den Algorithmus 1.6 der Vorlesung durch, notieren dabei jedoch die auftretenden Permutationsmatrizen P_ν und die elementaren unteren Dreiecksmatrizen L_ν, $\nu = 1, 2, 3$.
Wir setzen zu Beginn $A^{(1)} := A$.
1. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $2 = \left|a_{31}^{(1)}\right| = \max_{1 \le i \le 4} \left|a_{i1}^{(1)}\right|$ wird die erste mit der dritten Zeile vertauscht. Dies leistet die Permutationsmatrix

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

durch Linksmultiplikation von $A^{(1)}$ mit dieser Permutationsmatrix erhalten wir also

$$\tilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Für $i = 2, 3, 4$ setzen wir $l_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}}$ und

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -l_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Linksmultiplikation von $\tilde{A}^{(1)}$ mit L_1 bewirkt gerade die Elimination der Elemente der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen, es ist

$$A^{(2)} := L_1 \tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $1 = \left|a_{22}^{(2)}\right| = \max_{2 \le i \le 4} \left|a_{i2}^{(2)}\right|$, ist keine Zeilenvertauschung zur Pivotisierung notwendig. Deswegen setzen wir $P_2 = E$ und $\tilde{A}^{(2)} := P_2 A^{(2)}$.
(ii) Eliminationsprozess: Wir setzen $l_{32} = \frac{\tilde{a}_{32}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} = -1$ und $l_{42} = \frac{\tilde{a}_{42}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} = 0$. Damit ergibt sich

$$A^{(3)} := L_2 \tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $1 = \left|a_{43}^{(3)}\right| > \left|a_{33}^{(3)}\right| = 0$ wird die dritte mit der vierten Zeile vertauscht. Wir setzen

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und erhalten

$$\tilde{A}^{(3)} := P_3 A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Da $a_{43} = 0$, müssen wir diesen Schritt nicht durchführen, d.h. wir setzen $L_3 := E$ und $A^{(4)} = L_3 \tilde{A}^{(3)}$.
Fassen wir alle drei Schritte zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A^{(4)} &= L_3 \tilde{A}^{(3)} = L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = L_3 \underbrace{(P_3 L_2 P_3)}_{=:\tilde{L}_2} \underbrace{(P_3 P_2 L_1 P_2 P_3)}_{=:\tilde{L}_1} \underbrace{(P_3 P_2 P_1)}_{=:P} A \\ &= L_3 \tilde{L}_2 \tilde{L}_1 P A. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$PA = \underbrace{\tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} L_3^{-1}}_{=:L} \underbrace{A^{(4)}}_{=:R} = LR$$

mit

$$P = P_3 P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Außerdem ist

$$\tilde{L}_1 = P_3 P_2 L_1 P_2 P_3 = P_3 L_1 P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nach Aufgabe 1.4 der Vorlesung lässt sich die Inverse $\tilde{L}_1^{-1}$ der elementaren unteren Dreiecksmatrix $\tilde{L}_1$ durch Umkehrung der Vorzeichen in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen berechnen. Somit ist

$$\tilde{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\tilde{L}_2 = P_3 L_2 P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\tilde{L}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da $L_3 = E$, folgt $L_3^{-1} = E^{-1} = E$. Somit ist

$$L = \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die LR-Zerlegung ist also durch $PA = LR$ gegeben mit

$$LR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$