Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
08.05.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1: Um die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

zu bestimmen, führen wir den Gauß-Algorithmus symmetrisch durch. Da A symmetrisch und positiv definit ist, werden keine Zeilenvertauschungen benötigt.

Wir setzen $A^{(1)} := A$. Um die Nichtdiagonalelemente der ersten Spalte zu eliminieren, multiplizieren wir $A^{(1)}$ von links mit der elementaren unteren Dreiecksmatrix

$$L_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Multiplikation von rechts mit der Matrix L_1^H führt aufgrund der Symmetrie von A zur Elimination der Nichtdiagonalelemente der ersten Zeile. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} A^{(2)} := L_1 A^{(1)} L_1^H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} L_1^H \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir eliminieren im zweiten Schritt die Nichtdiagonalelemente der zweiten Zeile und Spalte und setzen dazu

$$L_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^{(3)} := L_2 A^{(2)} L_2^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} L_2^H$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Um im letzten Schritt die Nichtdiagonalelemente der dritten Zeile und Spalte zu eliminieren, setzen wir

$$L_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten schließlich die Diagonalmatrix

$$A^{(4)} := L_3 A^{(3)} L_3^H = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen nun $D := A^{(4)}$. Dann ist

$$\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und wir erhalten insgesamt die Darstellung

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} \sqrt{D} (L_3^H)^{-1} (L_2^H)^{-1} (L_1^H)^{-1}.$$

Da es sich bei den Matrizen L_1, L_2 und L_3 um elementare untere Dreiecksmatrizen handelt, lässt sich deren Inverse durch Umkehrung der Vorzeichen unterhalb der Diagonalen berechnen. Folglich gilt

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Cholesky-Zerlegung von A ist somit gegeben durch $A = LL^H$.

Wir bestimmen nun die Lösung des linearen Gleichungssystems $LL^H x = Ax = b$ mit $b = \begin{bmatrix} 32 \\ 26 \\ 20 \\ -6 \end{bmatrix}$, indem wir das gestaffelte System

$$Ly = b$$
$$L^H x = y$$

lösen. Dazu bestimmen wir zunächst y durch Vorwärtseinsetzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{4} \cdot 32 = 8 \\
y_2 &= \frac{1}{3}(26 - y_1) = 6 \\
y_3 &= \frac{1}{2}(20 - y_1 - y_2) = 3 \\
y_4 &= -6 + y_1 - y_2 + y_3 = -1,
\end{aligned}$$

also $y = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Durch anschließendes Rückwärtseinsetzen in der zweiten Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_4 &= -1 \\
x_3 &= \frac{1}{2}(3 + x_4) = 1 \\
x_2 &= \frac{1}{3}(6 - x_3 - x_4) = 2 \\
x_1 &= \frac{1}{4}(8 - x_2 - x_3 + x_4) = 1.
\end{aligned}$$

Folglich ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2:

(a) Wir verfolgen den Ansatz

$$w = \frac{v - tu}{\|v - tu\|}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
H_w v = \alpha u \quad &\iff \quad \Big(E - 2 \underbrace{\frac{v - tu}{\|v - tu\|}}_{=w} \underbrace{\frac{(v - tu)^H}{\|v - tu\|}}_{=w^H}\Big) v = \alpha u \\
&\iff \quad v\Big(\|v - tu\|^2 - 2\|v\|^2 + 2\bar{t} < u, v >\Big) \\
&\qquad\quad + u\Big(2t\|v\|^2 - 2|t|^2 < u, v > -\alpha\|v - tu\|^2\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Da u und v linear unabhängig sind, folgt

$$\|v - tu\|^2 - 2\|v\|^2 + 2\bar{t} < u, v > \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad 2t\|v\|^2 - 2|t|^2 < u, v > -\alpha\|v - tu\|^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\iff$$

$$-2\|v\|^2 + |t|^2\|u\|^2 - 2iIm(t\overline{< u, v >}) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{2t\|v\|^2 - 2|t|^2 < u, v >}{\|v - tu\|^2}.$$

Wähle daher $t_\pm = \pm\frac{\|v\|}{\|u\|} e^{i \cdot arg(< u,v >)}$ und es folgt

$$\alpha_\pm = t_\pm = \pm\frac{\|v\|}{\|u\|} e^{i \cdot arg(< u,v >)}.$$

Beachte: Numerisch sinnvoll ist die Wahl von t_- wegen

$$\|v - t_\pm u\|^2 = \|v\|^2 + |t|^2\|u\|^2 - 2Re(t\overline{< u, v >}) = 2\|v\|^2 \mp \frac{\|v\|}{\|u\|} | < u, v > |,$$

d.h. $\|v - t_- u\| > \|v - t_+ u\|$.

(b) Im konkreten Beispiel erhalten wir aus $\|u\| = \sqrt{6}, \|v\| = \sqrt{2}, < u, v >= 1$

$$\alpha_- = t_- = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} e^{i \cdot 0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$w = \frac{v - t_- u}{\|v - t_- u\|} = \frac{1}{\sqrt{12 + 2\sqrt{3}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} + 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Offensichtlich der Vektor $\overline{\nu} = \begin{bmatrix} \overline{\nu_1} \\ \vdots \\ \overline{\nu_n} \end{bmatrix}$ orthogonal zu der Ebene Z. Damit realisiert die Matrix H_w mit $w = \frac{\overline{\nu}}{\|\nu\|}$ die gesuchte Spiegelung.

(d) Es gilt

$$\nu = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|v\| = \sqrt{15}$$

und somit

$$w = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}, \quad H_w = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} & \frac{-12}{15} & 0 & \frac{4}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{-12}{15} & \frac{-3}{15} & 0 & \frac{6}{15} & \frac{-6}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & 0 & \frac{13}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-6}{15} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}.$$