Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
29.05.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1: Um die Cholesky-Zerlegung mit Diagonal-Pivotisierung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 18 \end{bmatrix}$$

durchzuführen, wird in jedem Schritt i das maximale Diagonalelement gesucht und mit a_{ii} vertauscht. Dies geschieht durch Multiplikation von links und von rechts mit einer geeigneten Permutationsmatrix. Anschließend wird der normale Cholesky-Schritt durchgeführt.

Wir setzen $A^{(1)} := A$.

1. Schritt: (i) Diagonal-pivotisierung: Wegen $a_{33} = \max_{1\leq i\leq 3} a_{ii}$ wird die erste mit der dritten Zeile und dann die erste mit der dritten Spalte vertauscht:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} P_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 18 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Eliminationsprozess: Um die Nichtdiagonalelemente der ersten Spalte und Zeile zu eliminieren, setzen wir für $i = 2, 3$ $l_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}}$. Dann gilt

$$A^{(2)} := L_1 \tilde{A}^{(1)} L_1^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

2. Schritt: (i) Diagonal-pivotisierung: Da $a_{33} > a_{22}$ wird die zweite mit der dritten Zeile und dann die zweite mit der dritten Spalte vertausch:

$$\tilde{A}^{(2)} := P_2 A^{(2)} P_2 == \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Um im letzten Schritt die Nichtdiagonalelemente der zweiten Zeile und Spalte zu eliminieren, setzen wir

$$L_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten schließlich die Diagonalmatrix

$$A^{(3)} := L_2 \tilde{A}^{(2)} L_2^H = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fassen wir alle Schritte zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
D := A^{(3)} &= L_2\tilde{A}^{(2)}L_2^H = L_2P_2A^{(2)}P_2L_2^H \\
&= L_2P_2L_1\tilde{A}^{(1)}L_1^HP_2L_2^H = L_2P_2L_1P_1A^{(1)}P_1L_1^HP_2L_2^H \\
&= L_2\underbrace{P_2L_1P_2}_{=:\tilde{L}_1}\underbrace{P_2P_1}_{=:P}A\underbrace{P_1P_2}_{=P^H}\underbrace{P_2L_1^HP_2}_{=\tilde{L}_1^H}L_2^H.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$PAP^H = \tilde{L}_1^{-1}L_2^{-1}D(L_2^H)^{-1}(\tilde{L}_1^H)^{-1} = \underbrace{\tilde{L}_1^{-1}L_2^{-1}\sqrt{D}}_{=:L}\underbrace{\sqrt{D}(L_2^H)^{-1}(\tilde{L}_1^H)^{-1}}_{=L^H}.$$

Es gilt

$$\tilde{L}_1 = P_2L_1P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$L = \tilde{L}_1^{-1}L_2^{-1}\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zunächst bestimmen wir die Lösung von $Ax = b$. Da $PAP^H = LL^H$, folgt $PA = LL^HP$ und somit

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff LL^H\underbrace{Px}_{=:y} = Pb,$$

d.h. wir müssen das folgende gestaffelte System lösen

$$\begin{aligned} Lz &= Pb \\ L^Hy &= z, \end{aligned}$$

wobei

$$Pb = P_2P_1b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dazu bestimmen wir zuerst z durch Vorwärtseinsetzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot (-6) = -\sqrt{2}, \\
z_2 &= \frac{2}{3\sqrt{2}}(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}z_1) = 2\sqrt{2}, \\
z_3 &= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_2 = 1,
\end{aligned}$$

also $z = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Durch anschließendes Rückwärtseinsetzen in der zweiten Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_3 &= 1 \\
y_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3) = 1 \\
y_1 &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3) = -1.
\end{aligned}$$

Folglich ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ durch

$$x = P^H y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Aufgabe 2:

(a) Wir führen die ersten vier Schritte der in Algorithmus 2.2 der Vorlesung beschriebenen von-Mises Iteration zum Startvektor $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ durch. Es gilt

$$\begin{aligned}
z^1 &= Ax^0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, & x^1 &= \frac{z^1}{z_2^1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}, \\
z^2 &= Ax^1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{4} \\ \frac{19}{4} \end{bmatrix}, & x^2 &= \frac{z^2}{z_2^2} = \begin{bmatrix} \frac{18}{19} \\ 1 \end{bmatrix}, \\
z^3 &= Ax^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{18}{19} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{93}{19} \\ \frac{94}{19} \end{bmatrix}, & x^3 &= \frac{z^3}{z_2^3} = \begin{bmatrix} \frac{93}{94} \\ 1 \end{bmatrix}, \\
z^4 &= Ax^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{93}{94} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{468}{94} \\ \frac{469}{94} \end{bmatrix}, & x^4 &= \frac{z^4}{z_2^4} = \begin{bmatrix} \frac{468}{469} \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Dabei wurde zur Normierung der Iterierten $z^k,\ k = 1, 2, 3, 4$, jeweils durch den betragsmäßig größten Eintrag im Vektor z^k dividiert.

(b) Allgemein lässt sich die Inverse einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ berechnen als

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Es ist $\det(A) = 5 \neq 0$ und somit A regulär. Folglich ist die Inverse der Matrix A gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nach Algorithmus 2.4 der Vorlesung lassen sich die ersten vier Iterierten der inversen Iteration von Wielandt zum Startvektor $y^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
w^1 &= A^{-1}y^0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, & y^1 &= \frac{w^1}{w_1^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\
w^2 &= A^{-1}y^1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{20} \\ -\frac{3}{10} \end{bmatrix}, & y^2 &= \frac{w^2}{w_1^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix}, \\
w^3 &= A^{-1}y^2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{94}{95} \\ -\frac{31}{95} \end{bmatrix}, & y^3 &= \frac{w^3}{w_1^3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{31}{94} \end{bmatrix}, \\
w^4 &= A^{-1}y^3 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{31}{94} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{469}{470} \\ -\frac{156}{470} \end{bmatrix}, & y^4 &= \frac{w^4}{w_1^4} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{156}{469} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternativ kann auch Algorithmus 2.6 der Vorlesung verwendet werden. Dazu bestimmt man zunächst die LR-Zerlegung der Matrix A und löst dann die auftretenden Gleichungssysteme durch Rückwärtssubstitution. In unserem Fall ist die LR-Zerlegung der Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} =: LR.$$

(c) Es gilt

$$Au_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 u_1,$$
$$Au_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 u_2,$$

d.h. λ_1 und λ_2 sind Eigenwerte der Matrix A mit zugehörigen Eigenvektoren u_1 bzw. u_2. Dies zeigt insbesondere, dass A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt und somit diagonalisierbar ist.

(i) Nach Resultat 2.3 der Vorlesung wird durch die von-Mises Iteration der betragsgrößte Eigenwert von A approximiert. Genauer gilt (mit der Notation aus Resultat 2.3)

$$z_{i_k}^{k+1} \to \lambda_2 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 3$ lässt sich aus Aufgabenteil (a) ablesen: $i_3 = 2$, und $z_{i_k}^{k+1} = z_3^4 = \frac{469}{94} \approx 4.989$ ist eine Näherung an den Eigenwert $\lambda_2 = 5$. Der absolute Fehler der Approximation beträgt

$$\left| z_2^4 - \lambda_2 \right| = \frac{1}{94} = 0.011\ldots.$$

Ferner liefert x^k eine Näherung an ein Vielfaches des zugehörigen Eigenvektors $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, d.h.

$$x^k - \frac{u^2}{u_{i_k}^2} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 4$ lässt sich aus (a) ablesen: $i_4 = 1$ und $x^4 = \begin{bmatrix} \frac{468}{469} \\ 1 \end{bmatrix}$ ist eine Näherung an den Eigenvektor $\frac{u^2}{u_1^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Der absolute Fehler, gemessen in der Maximumnorm, beträgt

$$\left\| x^4 - \frac{u^2}{u_1^2} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \frac{468}{469} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{469} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{ \left| -\frac{1}{469} \right|, 0\} = \frac{1}{469} = 0.002\ldots.$$

(ii) Nach Resultat 2.5 liefert die inverse Iteration von Wielandt eine Approximation an den Kehrwert des betragskleinsten Eigenwerts von A. Genauer gilt hier

$$w_{i_k}^{k+1} \to \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 3$ lesen wir aus Aufgabenteil (b) ab: $i_3 = 1$ und $\frac{1}{w_{i_k}^{k+1}} = \frac{1}{w_1^4} = \frac{470}{469} \approx 1.002$ ist eine Näherung an den Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Der absolute Fehler der Approximation beträgt

$$\left| \frac{1}{w_1^4} - \lambda_1 \right| = \frac{1}{469} = 0.002\ldots.$$

Außerdem liefert hier y^k eine Näherung an ein Vielfaches des zugehörigen Eigenvektors $u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, d.h.

$$y^k - \frac{u^1}{u_{i_k}^1} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 4$ können wir aus (b) ablesen: $i_4 = 1$ und $y^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{156}{469} \end{bmatrix}$ ist eine Approximation des Eigenvektors $\frac{u^1}{u^1_1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Der absolute Fehler, gemessen in der Maximumnorm, beträgt

$$\left\| y^4 - \frac{u^1}{u^1_1} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{156}{469} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{1407} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{1407} = 0.0007\ldots.$$