Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
29.05.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Da das Optimierungsproblem bereits als Standardmodell in Normalform vorliegt, kann man direkt das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus aufstellen. Es ist gegeben durch

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
y_1	$\boxed{2}$	1	1	1	0	0	150
y_2	2	2	8	0	1	0	200
y_3	2	3	1	0	0	1	320
	-3	-2	-1	0	0	0	0

Das betragsgrößte negative Element der Zielfunktionszeile ist -3, somit ist die erste Spalte die Pivotspalte. Das Pivotelement ist wegen $\frac{150}{2} < \frac{200}{2}$ und $\frac{150}{2} < \frac{320}{2}$ das Element $a_{11} = 2$. Wir tauschen die Basisvariable y_1 gegen x_1 aus und erzeugen durch Zeilenumformungen in der ersten Spalte den ersten Einheitsvektor. Das neue Tableau ist dann gegeben durch

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	75
y_2	0	$\boxed{1}$	7	-1	1	0	50
y_3	0	2	0	-1	0	1	170
	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	225

Das einzige negative Element in der Zielfunktionszeile ist $-\frac{1}{2}$, also ist die zweite Spalte die Pivotspalte. Wegen $50 < \frac{75}{\frac{1}{2}} < \frac{170}{2}$ ist das Element $a_{22} = 1$ das Pivotelement.
Durch Zeilenumformungen und Austausch der Basisvariable ergibt sich

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
x_1	1	0	-3	1	$-\frac{1}{2}$	0	50
x_2	0	1	7	-1	1	0	50
y_3	0	0	-14	1	-2	1	70
	0	0	4	1	$\frac{1}{2}$	0	250

Alle Einträge in der Zielfunktionszeile sind ≥ 0, der Simplex-Algorithmus ist zu Ende.
Der optimale Wert der Zielfunktion ist

$$\begin{aligned} 250 &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &= 3 \cdot 50 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 0. \end{aligned}$$

(b) Zunächst muss das Problem auf Normalform gebracht werden. Wir multiplizieren dazu die Zielfunktion und die erste Nebenbedingung mit (-1) und erhalten das äquivalente Problem:

Maximiere $f(x) = -6 + 2x_1 + x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Da $\max f(x) = -6 + \max(\underbrace{2x_1 + x_2}_{=:g(x)})$ gilt, können wir die Konstante bei der Berechnung zunächst weglassen.
Das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus lautet

	x_1	x_2	y_1	y_2	
y_1	-1	1	1	0	1
y_2	$\boxed{1}$	-2	0	1	2
	-2	-1	0	0	0

Unter den negativen Einträgen in der Zielfunktionszeile hat -2 den größten Betrag, d.h. die erste Spalte ist Pivotspalte. Außerdem ist $a_{21} = 1$ Pivotelement, da $a_{11} < 0$ ist.
Wir tauschen die Basisvariable y_2 gegen x_1 aus, die Zeilenumformungen liefern

	x_1	x_2	y_1	y_2	
y_1	0	-1	1	1	3
x_1	1	-2	0	1	2
	0	-5	0	2	4

Im nächsten Schritt wird die zweite Spalte zur Pivotspalte. Da jedoch alle Einträge in dieser Spalte negativ sind, bricht der Simplex-Algorithmus an dieser Stelle ab.
D.h. es gibt keine optimale Lösung des gegebenen Problems. Wir können x_2 beliebig groß wählen und damit wird auch die Zielfunktion $g(x)$ beliebig groß. Setzen wir z.B. $x_2 := t$, so kann man aus dem Tableau ablesen, dass

$$x_1 - 2x_2 + y_2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 2 + 2x_2 - y_2 = 2 + 2t - \underbrace{0}_{\substack{\text{da } y_2 \text{ keine} \\ \text{Basisvariable ist}}},$$

d.h. der Vektor $x = x(t)$ ist durch

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (2 + 2t, t)$$

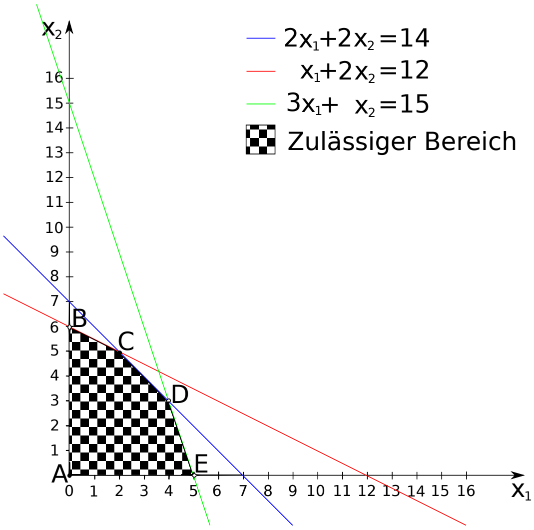
für $t \geq 0$ gegeben. Der Wert der Zielfunktion $g(x)$ ist dann

$$\begin{aligned} g(x(t)) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ &= 2 + 5t \to \infty \quad \text{für } t \to \infty \end{aligned}$$

und folglich

$$f(x(t)) = -6 + g(x(t)) \to \infty \quad \text{für } t \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad z(x(t)) = -f(x) \to -\infty \quad \text{für } t \to \infty.$$

Aufgabe 2: Der zulässige Bereich dieses Problems wird hier abgebildet:



Nach Folgerung 3.5 genügt es nur die zulässige Ecken A, B, C, D und F als Kandidaten für die optimale Lösung zu betrachten. Wir haben

$$\begin{aligned}
z_A &= z(0,0) = 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0, \\
z_B &= z(0,6) = 10 \cdot 0 + 8 \cdot 6 = 48, \\
z_C &= z(2,5) = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 60, \\
z_D &= z(4,3) = 10 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 64, \\
z_E &= z(5,0) = 10 \cdot 5 + 8 \cdot 0 = 50.
\end{aligned}$$

Da $z_D > z_C > z_E > z_B > z_A$, ist 64 die optimale Lösung.