Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
18.06.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie für

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

die Konditionzahl der Matrix bezüglich der Spaltensummen-, der Spektral- und der Zeilensummennorm (d.h. zu berechnen sind $\operatorname{cond}_1(A)$, $\operatorname{cond}_2(A)$ und $\operatorname{cond}_\infty(A)$).

(b) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Es sei $b+\Delta b$ eine Störung der rechten Seite. Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler (gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm) der Lösung an, falls für den absoluten Fehler der Störung $\|\Delta b\|_2 < 10^{-3}$ gilt. Wie groß darf der relative Fehler der Störung höchstens sein, damit garantiert ist, dass der relative Fehler in der Lösung kleiner als 10^{-4} ist (jeweils gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm)?

Hinweis: Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ lassen sich die Matrixnormen wie folgt berechnen:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{(„Spaltensummennorm“)}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} \qquad \text{(„Spektralnorm“)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{(„Zeilensummennorm“).}$$

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = x \cdot e^{-x^2} - 0.2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass F mindestens zwei Nullstellen in $(0, 2)$ besitzt.

(b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F und führen Sie drei Iterationen zu allen Startwerten $x^0 \in \{0, 1, 5\}$ durch. Disskutieren Sie das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens bei den verschiedenen Startwerten x^0 (vgl. Satz 5.1 der Vorlesung).

Die Aufgaben werden in der Übung am 26.06.2015 besprochen.