Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
26.06.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

gilt

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}.$$

(i)

$$\operatorname{cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$$

Da

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|1| + |2|, |8| + |-4|\} = 12,$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |(a^{(-1)})_{ij}| = \max\{\left|\frac{1}{5}\right| + \left|\frac{1}{10}\right|, \left|\frac{2}{5}\right| + \left|-\frac{1}{20}\right|\} = \frac{9}{20},$$

folgt

$$\operatorname{cond}_1(A) = 12 \cdot \frac{9}{20} = 5.4.$$

(ii)

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Es gilt

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^H A)} \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((A^{-1})^H A^{-1})}.$$

Wir haben

$$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$$

und folglich $\lambda_{\max} = \sqrt{80}$.
Weiter gilt

$$(A^{-1})^H A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{3}{40} \\ \frac{3}{40} & \frac{13}{80} \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{80}$. Folglich ist $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}$ und somit

$$\operatorname{cond}_2(A) = \sqrt{80} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{16} = 4.$$

(iii)

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

Da

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|1| + |8|, |2| + |-4|\} = 9,$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^{2} |(a^{(-1)})_{ij}| = \max\{\left|\frac{1}{5}\right| + \left|\frac{2}{5}\right|, \left|\frac{1}{10}\right| + \left|-\frac{1}{20}\right|\} = \frac{3}{5},$$

folgt

$$\operatorname{cond}_\infty(A) = 9 \cdot \frac{3}{5} = 5.4.$$

(b) Nach Resultat 4.2 der Vorlesung gilt

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \operatorname{cond}_2(C) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}.$$

Wir haben

$$\operatorname{cond}_2(C) = \|C\|_2 \|C^{-1}\|_2.$$

Wegen der Symmetrie von C folgt

$$\|C\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(C^H C)} = \sqrt{\lambda_{max}(C^2)}.$$

Die Eigenwerte von

$$C^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

sind $1, 9$ und 16 und folglich ist $\|C\|_2 = \sqrt{16} = 4$.
Weiter gilt

$$(C^{-1})^2 = (C^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

und die Eigenwerte dieser Matrix sind $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$. Daher $\|C^{-1}\|_2 = \sqrt{1} = 1$.
Da

$$\|b\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5$$

folgt

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \operatorname{cond}_2(C) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \leq \frac{4}{5} \cdot 10^{-3}.$$

Jetzt möchten wir $\|\Delta b\|_2$ so abschätzen, dass

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} < 10^{-4}.$$

Wir wissen, dass

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \operatorname{cond}_2(C) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = \frac{4}{5} \|\Delta b\|_2$$

und deswegen muss $\|\Delta b\|_2 < \frac{5}{4} \cdot 10^{-4}$.

Aufgabe 2: Für

$$F(x) = x \cdot e^{-x^2} - 0.2$$

gilt

$$\begin{aligned} F(0) &= -0.2 < 0, \\ F(2) &\approx -0.1634 < 0, \\ F(1) &\approx 0.1678 > 0. \end{aligned}$$

Da F stetig ist, besitzt F nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Nullstellen im Intervall $(0, 2)$ (eine in $(0, 1)$ und eine weitere in $(1, 2)$).
Es ist

$$F'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F lautet also

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{x^k - 0.2e^{(x^k)^2}}{1 - 2(x^k)^2}.$$

Mit dem Startwert $x^0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x^1 &= 0 - \frac{0 - 0.2 \cdot e^0}{1 - 2 \cdot 0} = 0.2, \\ x^2 &= 0.2 - \frac{0.2 - 0.2 \cdot e^{(0.2)^2}}{1 - 2 \cdot (0.2)^2} \approx 0.20887, \\ x^3 &= 0.20887 - \frac{0.20887 - 0.2 \cdot e^{(0.20887)^2}}{1 - 2 \cdot (0.20887)^2} \approx 0.20892 \end{aligned}$$

und dies approximieren die Nullstelle, die sich im Intervall $(0, 1)$ befindet.
Für den Startwert $x^0 = 1$ haben wir

$$\begin{aligned} x^1 &= 1 - \frac{1 - 0.2 \cdot e^1}{1 - 2 \cdot 1} \approx 1.4563, \\ x^2 &= 1.4563 - \frac{1.4563 - 0.2 \cdot e^{(1.4563)^2}}{1 - 2 \cdot (1.4563)^2} \approx 1.3912, \\ x^3 &= 1.3912 - \frac{1.3912 - 0.2 \cdot e^{(1.3912)^2}}{1 - 2 \cdot (1.3912)^2} \approx 1.3932 \end{aligned}$$

und dies sind Approximationen von der Nullstelle, die in $(1, 2)$ liegt.
Mit $x^0 = 5$ gilt

$$\begin{aligned} x^1 &= 5 - \frac{5 - 0.2 \cdot e^{5^2}}{1 - 2 \cdot 5^2} \approx -2.939 \cdot 10^8, \\ x^2 &= -2.939 \cdot 10^8 - \frac{-2.939 \cdot 10^8 - 0.2 \cdot e^{(-2.939 \cdot 10^8)^2}}{1 - 2 \cdot (-2.939 \cdot 10^8)^2} \approx -\infty, \end{aligned}$$

d.h. mit dem Startwert $x^0 = 5$ divergiert das Newton-Verfahren.