Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
13.07.2015

Numerische Methoden
für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1: Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Die Trapezregel ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

die zusammengesetzte Trapezregel zur Intervalllänge h ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\big(f(a) + 2f(a+h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b)\big)$$

und die Simpsonregel/Keplersche Fassregel ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

(a) Wir setzen $a = 2,\ b = 4$ und $f(x) = \frac{x}{x-1},\ x \in \mathbb{R}$. Der exakte Wert des Integrals ist

$$\int_2^4 \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x = \int_2^4 1\mathrm{d}x + \int_2^4 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = 2 + \ln 3 \approx 3.0986.$$

Die Näherung mit Hilfe der Trapezregel ergibt

$$\int_2^4 \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x \approx (4-2)\frac{f(2)+f(4)}{2} \approx 3.3333.$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ 0.2347.
Die Näherung mit der zusammengesetzten Trapezregel mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ ergibt

$$\int_2^4 \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x \approx \frac{\frac{1}{2}}{2}\big(f(2) + f(2.5) + f(3) + f(3.5) + f(4)\big) \approx 3.1167.$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ 0.0181.
Die Näherung mit Hilfe der Simpsonregel ergibt

$$\int_2^4 \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x \approx \frac{2}{6}\big(f(2) + 4f(3) + f(4)\big) \approx 3.1111.$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ 0.0125.

(b) Wir setzen $a = 0,\ b = 2$ und $f(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$. Die Näherung mit Hilfe der Trapezregel ergibt

$$\int_0^2 e^{x^2}\mathrm{d}x \approx (2-0)\frac{f(0)+f(2)}{2} \approx 55.5982.$$

Nach Satz 6.1 gilt es für den Fehler der Approximation

$$|R(f)| \leq \left| -\frac{1}{12}(b-a)^3 \max_{x\in[0,2]} f''(x) \right| = \frac{1}{12} \cdot 2^3 \cdot f''(2) \approx 655.1778.$$

Die Näherung mit der zusammengesetzten Trapezregel mit 4 Schritten (d.h. mit $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$) ergibt

$$\int_0^2 e^{x^2} \mathrm{d}x \approx \frac{\frac{1}{2}}{2}\big(f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2)\big) \approx 20.6446.$$

Für den Fehler der Approximation gilt

$$R(f) \leq \underbrace{R_1(f)}_{\substack{\text{Fehler}\\ \text{in}[0,\frac{1}{2}]}} + \underbrace{R_2(f)}_{\substack{\text{Fehler}\\ \text{in}[\frac{1}{2},1]}} + \underbrace{R_3(f)}_{\substack{\text{Fehler}\\ \text{in}[1,\frac{3}{2}]}} + \underbrace{R_4(f)}_{\substack{\text{Fehler}\\ \text{in}[\frac{3}{2},2]}}$$

und nach Satz 6.6

$$\begin{aligned}
|R_1(f)| &\leq \left| -\frac{1}{12}\Big(\frac{1}{2} - 0\Big)^3 \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} f''(x) \right| = \frac{1}{96} f''\Big(\frac{1}{2}\Big) \approx 0.0401,\\
|R_2(f)| &\leq \left| -\frac{1}{12}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^3 \max_{x\in[\frac{1}{2},1]} f''(x) \right| = \frac{1}{96} f''(1) \approx 0.1699,\\
|R_3(f)| &\leq \left| -\frac{1}{12}\Big(\frac{3}{2} - 1\Big)^3 \max_{x\in[1,\frac{3}{2}]} f''(x) \right| = \frac{1}{96} f''\Big(\frac{3}{2}\Big) \approx 1.0871,\\
|R_4(f)| &\leq \left| -\frac{1}{12}\Big(2 - \frac{3}{2}\Big)^3 \max_{x\in[\frac{3}{2},2]} f''(x) \right| = \frac{1}{96} f''(2) \approx 10.2372.
\end{aligned}$$

Folglich

$$|R(f)| \leq 11.5343.$$

Die Näherung mit Hilfe der Keplerschen Fassregel ergibt

$$\int_0^2 e^{x^2} \mathrm{d}x \approx \frac{2}{6}\big(f(0) + f(1) + f(2)\big) \approx 22.1571.$$

Nach Satz 6.6 gilt

$$|R(f)| \leq \left| -\frac{1}{90} \cdot \frac{2-0}{2} \max_{x\in[0,2]} f^{(4)}(x) \right| \approx 279.0572.$$

Aufgabe 2: Es sei im Folgenden stets $f(x,y) = 1 - xy$.

(a) Das Euler-Verfahren zum gegebenen Anfangswertproblem lautet

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad y_0 = 1$$

mit $x_0 = 0$ und $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für die Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ erhält man

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(1 - x_n \cdot y_n).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0 + \frac{1}{4}(1 - 0 \cdot 1) = \frac{5}{4} = 1.25, && x_1 = \frac{1}{4},\\
y_2 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}\Big) = \frac{91}{64} \approx 1.4219, && x_2 = \frac{1}{2},\\
y_3 &= \frac{91}{64} + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{64}\Big) = \frac{765}{512} \approx 1.4941, && x_3 = \frac{3}{4},\\
y_4 &= \frac{765}{512} + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{765}{512}\Big) = \frac{11993}{8192} \approx 1.464, && x_4 = 1,
\end{aligned}$$

d.h. die Näherungslösung im Punkt $x_4 = 1$ ist gegeben durch $y(1) \approx 1.464$.

(b) Das Verfahren von Heun ist beschrieben durch

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{1}{2}\Big(f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\Big)$$

mit $x_0 = 0$ und $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ erhält man

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{1 - 0 \cdot 1}_{=f(x_0,y_0)} + \underbrace{1 - \underbrace{\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}(1 - 0 \cdot 1)\Big)}_{=(x_0+h)\cdot\big(y_0+h(1-x_0\cdot y_0)\big)}}_{=f\big(x_0+h, y_0+hf(x_0,y_0)\big)}\Bigg) = \frac{21}{16} = 1.3125, \qquad x_1 = \frac{1}{2},$$

$$y_2 = \frac{21}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{16}}_{=f(x_1,y_1)} + \underbrace{1 - \underbrace{\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{21}{16} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{16})\Big)}_{=(x_1+h)\cdot\big(y_1+h(1-x_1\cdot y_1)\big)}}_{=f\big(x_1+h, y_1+hf(x_1,y_1)\big)}\Bigg) = \frac{327}{256} \approx 1.2773, \quad x_2 = 1,$$

d.h. die Näherungslösung im Punkt $x_2 = 1$ ist gegeben durch $y(1) \approx 1.2773$.

Aufgabe 3: Diese Aufgabe wird in der Übung am 17.07.2015 besprochen.