Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

SS 2015
21.07.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Es sei im Folgenden $f(x,y) = 3x - y + 8$ und $h = \frac{1}{2}$.
Das 3-stufige Runge-Kutta-Verfahren zum gegebenen Anfangswertproblem lautet

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\Big),$$

wobei

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f\Big(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h \cdot k_1\Big),\\
k_3 &= f\big(x_n + h, y_n + h(-k_1 + 2k_2)\big)
\end{aligned}$$

mit $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, \quad y_0 = 3,\\
k_1 &= f(x_0, y_0) = f(0,3) = 5,\\
k_2 &= f\Big(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}h \cdot k_1\Big) = f\Big(\frac{1}{4}, \frac{17}{4}\Big) = \frac{9}{2},\\
k_3 &= f\big(x_0 + h, y_0 + h(-k_1 + 2k_2)\big) = f\Big(\frac{1}{2}, 5\Big) = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

und somit

$$y_1 = y_0 + h\Big(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\Big) = \frac{127}{24}.$$

Für $n = 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{127}{24},\\
k_1 &= f(x_1, y_1) = f\Big(\frac{1}{2}, \frac{127}{24}\Big) = \frac{101}{24},\\
k_2 &= f\Big(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}h \cdot k_1\Big) = f\Big(\frac{3}{4}, \frac{203}{32}\Big) = \frac{125}{32},\\
k_3 &= f\big(x_1 + h, y_1 + h(-k_1 + 2k_2)\big) = f\Big(1, \frac{681}{96}\Big) = \frac{375}{96}.
\end{aligned}$$

Folglich ist die Näherungslösung im Punkt $x_2 = 1$ durch

$$y_2 = y_1 + h\Big(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\Big) = \frac{8375}{1152} \approx 7.27$$

gegeben.
Die exakte Lösung des gegebenen Anfangswertproblem ist $y(x) = -2e^{-x} + 3x + 5$ und $y(1) \approx 7.2642$.

(b) Die gegebene Differentialgleichung ist eine Gleichung 2. Ordnung und die ist äquivalent zum folgenden System

$$\begin{aligned} y' &= z =: F(x,y,z), \\ z' &= 6y - z =: G(x,y,z) \end{aligned}$$

mit $y(0) = 3, z(0) = y'(0) = 1$.
Das 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren zu diesem System lautet

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\Big(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\Big), \\ z_{n+1} &= z_n + h\Big(\frac{1}{6}l_1 + \frac{1}{3}l_2 + \frac{1}{3}l_3 + \frac{1}{6}l_4\Big) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_n, y_n, z_n), & l_1 &= G(x_n, y_n, z_n), \\ k_2 &= F\Big(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_n + \tfrac{1}{2}h\cdot l_1\Big), & l_2 &= G\Big(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_n + \tfrac{1}{2}h\cdot l_1\Big), \\ k_3 &= F\Big(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}h\cdot k_2, z_n + \tfrac{1}{2}h\cdot l_2\Big), & l_3 &= G\Big(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}h\cdot k_2, z_n + \tfrac{1}{2}h\cdot l_2\Big), \\ k_4 &= F(x_n + h, y_n + h\cdot k_3, z_n + h\cdot l_3), & l_4 &= G(x_n + h, y_n + h\cdot k_3, z_n + h\cdot l_3) \end{aligned}$$

mit $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad y_0 = y(0) = 3, \quad z_0 = z(0) = 1, \\ k_1 &= F(x_0, y_0, z_0) = F(0,3,1) = 1, & l_1 &= G(x_0, y_0, z_0) = G(0,3,1) = 17, \\ k_2 &= F\Big(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_1\Big) & l_2 &= G\Big(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_1\Big) \\ &= F\Big(\tfrac{1}{4}, \tfrac{13}{4}, \tfrac{21}{4}\Big) = \tfrac{21}{4}, & &= G\Big(\tfrac{1}{4}, \tfrac{13}{4}, \tfrac{21}{4}\Big) = \tfrac{57}{4}, \\ k_3 &= F\Big(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_2, z_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_2\Big), & l_3 &= G\Big(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_2, z_0 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_2\Big), \\ &= F\Big(\tfrac{1}{4}, \tfrac{69}{16}, \tfrac{73}{16}\Big) = \tfrac{73}{16}, & &= G\Big(\tfrac{1}{4}, \tfrac{69}{16}, \tfrac{73}{16}\Big) = \tfrac{341}{16} \\ k_4 &= F(x_0 + h, y_0 + h\cdot k_3, z_0 + h\cdot l_3), & l_4 &= G(x_0 + h, y_0 + h\cdot k_3, z_0 + h\cdot l_3) \\ &= F\Big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{169}{32}, \tfrac{373}{32}\Big) = \tfrac{373}{32}, & &= G\Big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{169}{32}, \tfrac{373}{32}\Big) = \tfrac{641}{32} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h\Big(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\Big) = \frac{2185}{384}, \\ z_1 &= z_0 + h\Big(\frac{1}{6}l_1 + \frac{1}{3}l_2 + \frac{1}{3}l_3 + \frac{1}{6}l_4\Big) = \frac{3845}{384}. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ haben wir

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}, \\ k_1 &= F(x_1, y_1, z_1) & l_1 &= G(x_1, y_1, z_1) \\ &= F\Big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2185}{384}, \tfrac{3845}{384}\Big) = \tfrac{3845}{384}, & &= G\Big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2185}{384}, \tfrac{3845}{384}\Big) = \tfrac{9265}{384}, \\ k_2 &= F\Big(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_1\Big) & l_2 &= G\Big(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_1\Big) \\ &= F\Big(\tfrac{3}{4}, \tfrac{12585}{1536}, \tfrac{24645}{1536}\Big) = \tfrac{24645}{1536}, & &= G\Big(\tfrac{3}{4}, \tfrac{12585}{1536}, \tfrac{24645}{1536}\Big) = \tfrac{50865}{1536}, \\ k_3 &= F\Big(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_2, z_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_2\Big), & l_3 &= G\Big(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot k_1, z_1 + \tfrac{1}{2}h\cdot l_2\Big), \\ &= F\Big(\tfrac{3}{4}, \tfrac{59605}{6144}, \tfrac{112385}{6144}\Big) = \tfrac{112385}{6144}, & &= G\Big(\tfrac{3}{4}, \tfrac{59605}{6144}, \tfrac{112385}{6144}\Big) = \tfrac{245245}{6144}, \\ k_4 &= F(x_1 + h, y_1 + h\cdot k_3, z_1 + h\cdot l_3), & l_4 &= G(x_1 + h, y_1 + h\cdot k_3, z_1 + h\cdot l_3) \\ &= F\Big(1, \tfrac{182305}{12288}, \tfrac{368285}{12288}\Big) = \tfrac{368285}{12288}, & &= G\Big(1, \tfrac{182305}{12288}, \tfrac{368285}{12288}\Big) = \tfrac{725545}{12288}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Näherungslösung im Punkt $x_2 = 1$ durch

$$y_2 = y_1 + h\Big(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\Big) = \frac{2174225}{147456} \approx 14.7449$$

gegeben.
Die exakte Lösung des gegebenen Anfangswertproblem ist $y(x) = 2e^{2x} + e^{-3x}$ und $y(1) \approx 14.8279$.

Aufgabe 2:

(a) Das gegebene Randwertproblem ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 4x, \quad x \in (0,1), \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 2. \end{aligned}$$

Das Finite-Differenzen-Schema mit $h = \frac{1}{N+1}$ und $x_i = i \cdot h, i = 1, \dots, N$ lautet

$$\underbrace{\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}}_{\approx y''(x_i)} + 4 \underbrace{y_i}_{\approx y(x_i)} = 4x_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\iff \quad y_{i-1} + (4h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 4h^2 x_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Die Randbedinungen implizieren $y_0 = y(0) = 0$ und $y_{N+1} = y(1) = 2$.
Daraus ergibt sich das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 4h^2-2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4h^2-2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4h^2-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4h^2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4h^2 x_1 - \overbrace{0}^{=y_0} \\ 4h^2 x_2 \\ 4h^2 x_3 \\ \vdots \\ 4h^2 x_N - \underbrace{2}_{=y_{N+1}} \end{bmatrix}.$$

(b) Für $N = 3$ erhalten wir $h = \frac{1}{4}$ und damit

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{29}{16} \end{bmatrix}.$$

Auflösen dieses Systems liefert

$$y_1 = \frac{375}{476} \approx 0.7878, \quad y_2 = \frac{49}{34} \approx 1.4412, \quad y_3 = \frac{885}{476} \approx 1.8592.$$

Exakte Lösung $y(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(2)} + x$ und Näherungslösung sind im untenstehenden Plot skizziert