Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

Herbst 2015
01.09.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

MODULPRÜFUNG

Name:

Matr.-Nr.:

1	2	3	4	5	6	$\sum$
						/24

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, eine untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass gilt

$$PA = LR.$$

Achten Sie dabei auf eine geeignete Pivotisierung.

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionzahl $cond_1(A)$ der Matrix A bezüglich der Spaltensummennorm.

(b) Führen Sie mit der Matrix A und dem Startvektor $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration durch. Geben Sie die im zweiten Schritt berechnete Näherung an den betragsgrößten Eigenwert von A an.

(c) Führen Sie zehn Schritte der inversen Iteration von Wielandt $y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ durch. Geben Sie die so berechnete Näherung an den betragskleinsten Eigenwert von A an.

Hinweis: Die Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich berechnen durch

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie mit dem Simplexalgorithmus den maximalen Wert der Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - 4$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8, \\ -x_1 + x_2 &\leq 5, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 0, \\ 0 \leq x_1 &\leq 4, \\ x_2 &\geq 2. \end{aligned}$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = x^3 - 2x - 100, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Iterierten des zugehörigen Newton-Verfahrens im Schritt k seien mit x^k bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass F mindestens eine Nullstelle $x^* \in (4, 5)$ besitzt.

(b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F und führen Sie zwei Iterationen zum Startwert $x^0 = 4$ durch.

(c) (i) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left| x^{k+1} - x^* \right| \leq \frac{18}{25} \cdot \left| x^k - x^* \right|^2 \qquad \text{für } x^k \in (x^* - 1, x^* + 1).$$

(ii) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit Startvektor x^0 gegen x^* konvergiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

(a) Es sei y die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) + xy(x) = 1 \quad \text{mit} \quad y(1) = 0.$$

Berechnen Sie Näherungswerte an $y(2)$ unter Verwendung des Halbschrittverfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(b) Finden Sie $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ so, dass die Näherungsformel $\frac{2}{3}(f(\alpha) + f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta))$ für das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ exakt ist für alle quadratischen Polynome.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Berechnen Sie eine Näherung für $y(3)$ der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= x^2 + 1 \quad x \in (0, 4), \\ y(0) = -1, &\quad y(4) = 15 \end{aligned}$$

mithilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, 1, \ldots, 4$.

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Montag, dem 28.09.2015, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 (Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) aus.

Die **Klausureinsicht** findet am Montag, dem 19.10.2015, 17.30-18.30 Uhr, in Raum 1.066/67 (Gebäude 20.30) statt.