Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

Herbst 2015
01.09.2015

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

MODULPRÜFUNG

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

(a) Die LR-Zerlegung mit Pivotisierung liefert die folgenden Matrizen.
Wir setzen zu Beginn $A^{(1)} := A$.
1. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $4 = \left|a_{21}^{(1)}\right| = \max_{1\leq i\leq 3}\left|a_{i1}^{(1)}\right|$ wird die erste mit der zweiten Zeile vertauscht. Dies leistet die Permutationsmatrix

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

durch Linksmultiplikation von $A^{(1)}$ mit dieser Permutationsmatrix erhalten wir also

$$\tilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Für $i = 2, 3$ setzen wir $l_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}}$ und

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Linksmultiplikation von $\tilde{A}^{(1)}$ mit L_1 bewirkt gerade die Elimination der Elemente der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen, es ist

$$A^{(2)} := L_1 \tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $\frac{1}{2} = \left|a_{22}^{(2)}\right| = \max_{2\leq i\leq 3}\left|a_{i2}^{(2)}\right|$ ist keine Zeilenvertauschung zur Pivotisierung notwendig. Deswegen setzen wir $P_2 = E$ und $\tilde{A}^{(2)} := P_2 A^{(2)}$.
(ii) Eliminationsprozess: Wir setzen $l_{32} = \frac{\tilde{a}_{32}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} = -1$. Damit ergibt sich

$$A^{(3)} := L_2 \tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fassen wir alle Schritte zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A^{(3)} = L_2 \tilde{A}^{(2)} = L_2 P_2 L_1 P_1 A &= L_2 \underbrace{(P_2 L_1 P_2)}_{=L_1} \underbrace{(P_2 P_1)}_{=P_1 =: P} A \\ &= L_2 L_1 P A. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$PA = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{=:L} \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} = LR$$

mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Um mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, verwenden wir folgende äquivalente Umformungen

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad PAx = Pb \quad \Longleftrightarrow \quad LRx = Pb.$$

Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} Ly &= Pb, \\ Rx &= y. \end{aligned}$$

Fur das erste System $Ly = Pb$, also

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

erhält man durch Vorwärtseinsetzen $y = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Bei dem zweiten System $Rx = y$, also

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

erhält man durch Rückwärtseinsetzen $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ als Lösung.

Aufgabe 2

(a) Die Konditionszahl $cond_1(A)$ einer Matrix A ist durch

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$$

definiert. Da (mit $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (b_{ij})$ gilt

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = 10, \qquad \|A^{-1}\|_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |b_{ij}| = \frac{5}{8},$$

folgt

$$cond_1(A) = \frac{25}{4}.$$

(b) Die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration lauten

$$z^1 = Ax^0 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^1 = \frac{z^1}{z^1_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$
$$z^2 = Ax^1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{5} \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}, \quad x^2 = \frac{z^2}{z^2_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{19} \end{bmatrix}.$$

Die Näherung im zweiten Schritt ergibt sich durch $z^{k+1}_{i_k}$ für $k = 1$, also $z^2_1 = \frac{38}{5}$.

(c) Die inverse Iteration von Wielandt wird wie folgt durchgeführt

$$w^1 = A^{-1}y^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & -\frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad y^1 = \frac{w^1}{w^1_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$w^2 = A^{-1}y^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & -\frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad y^2 = \frac{w^2}{w^2_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da $y^2 = y^1$ folgt $y^{10} = y^9 = \cdots y^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ und somit $w^{10} = w^9 = \cdots w^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Die Näherung im zehnten Schritt ergibt sich durch $\frac{1}{w^{k+1}_{i_k}}$ für $k = 9$, also $\frac{1}{w^{10}_2} = \cdots = \frac{1}{w^2_2} = -2$.

Aufgabe 3

Zunächst muss das Problem auf Normalform gebracht werden. Wir definieren dazu die neue Variable $\tilde{x}_2 = x_2 - 2$. Die Nebenbedingungen lauten jetzt

$$\begin{aligned} x_1 + \tilde{x}_2 &\le 6, \\ -x_1 + \tilde{x}_2 &\le 3, \\ 2x_1 + \tilde{x}_2 &\ge -2, \\ 0 \le x_1 &\le 4, \\ \tilde{x}_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

und die sind zu

$$\begin{aligned} x_1 + \tilde{x}_2 &\le 6, \\ -x_1 + \tilde{x}_2 &\le 3, \\ -2x_1 - \tilde{x}_2 &\le 2, \\ x_1 &\le 4, \\ x_1 \ge 0, \tilde{x}_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

äquivalent. Die Zielfunktion ist jetzt $z(x_1, \tilde{x}_2) = 4x_1 + 2\tilde{x}_2$.
Das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus lautet

	x_1	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_1	1	1	1	0	0	0	6
y_2	-1	1	0	1	0	0	3
y_3	-2	-1	0	0	1	0	2
y_4	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	4
	-4	-2	0	0	0	0	0

Unter den negativen Einträgen in der Zielfunktionszeile hat -4 den größten Betrag, d.h. die erste Spalte ist Pivotspalte. Außerdem ist $a_{41} = 1$ Pivotelement, da $\frac{b_4}{a_{41}} = 4 < 6 = \frac{b_1}{a_{11}}$ ist.
Wir tauschen die Basisvariable y_4 gegen x_1 aus. Die Zeilenumformungen liefern

	x_1	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_1	0	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	2
y_2	0	1	0	1	0	1	7
y_3	0	-1	0	0	1	2	10
x_1	1	0	0	0	0	1	4
	0	-2	0	0	0	4	16

Das einzige negative Element in der Zielfunktionszeile ist -2, also ist die zweite Spalte die Pivotspalte. Wegen $\frac{b_1}{a_{12}} = 2 < 7 = \frac{b_2}{a_{22}}$ ist das Element $a_{12} = 1$ das Pivotelement.
Durch Zeilenumformungen und Austausch der Basisvariable ergibt sich

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
$\tilde{x}_2$	0	1	1	0	0	-1	2
y_2	0	0	-1	1	0	2	5
y_3	0	0	1	0	1	1	12
x_1	1	0	0	0	0	1	4
	0	0	2	0	0	2	20

Alle Einträge in der Zielfunktionszeile sind ≥ 0, der Simplex-Algorithmus terminiert.
Der optimale Wert der Zielfunktion ist

$$20 = 4x_1 + 2\tilde{x}_2 = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2.$$

Aufgabe 4

(a) Für

$$F(x) = x^3 - 2x - 100,$$

gilt

$$F(4) = -44 < 0,$$
$$F(5) = 15 > 0.$$

Da F stetig ist, besitzt F nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(4, 5)$.

(b) Es ist

$$F'(x) = 3x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F lautet also

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{(x^k)^3 - 2x^k - 100}{3(x^k)^2 - 2}.$$

Mit dem Startwert $x^0 = 4$ erhalten wir

$$x^1 = 4 - \frac{4^3 - 2 \cdot 4 - 100}{3 \cdot 4^2 - 2} = 4 + \frac{22}{23} \approx 4.9565,$$
$$x^2 = 4.9565 - \frac{4.9565^3 - 2 \cdot 4.9565 - 100}{3 \cdot 4.9565^2 - 2} \approx 4.7917.$$

(c) (i) Nach (a) gilt $x^* \in (4, 5)$. Somit ist $(x^* - 1, x^* + 1) \subseteq (3, 6)$. Ferner gelten für $x \in (3, 6)$ die Abschätzungen

$$|F'(x)| = 3x^2 - 2 \geq F'(3) = 25 =: \alpha$$

und

$$|F''(x)| = 6x \leq F''(6) = 36 =: \beta.$$

Hieraus erhalten wir nach Satz 5.1 der Vorlesung

$$\left|x^{k+1} - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha} \cdot \left|x^k - x^*\right|^2 \leq \frac{18}{25} \cdot \left|x^k - x^*\right|^2$$

für alle $x^k \in (x^* - 1, x^* + 1)$.

(ii) Da $x^* \in (4,5)$ folgt $|x^* - x^0| \leq 1$. Also gilt $|x^* - x_0| \leq 1 < \frac{2\alpha}{\beta} = \frac{25}{18}$. Wieder nach Satz 5.1 konvergiert das Newton-Verfahren mit Startwert $x^0 = 4$ gegen x^*.

Aufgabe 5

(a) Das gegebene Anfangswertproblem ist zu

$$y'(x) = \underbrace{1 - xy(x)}_{=:f(x,y(x))} \quad \text{mit} \quad y(1) = 0$$

äquivalent. Da f stetig differenzierbar ist, hat dieses Problem eine eindeutige Lösung. Das Halbschrittverfahren zu diesem Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right) \\ &= y_n + h\left[1 - \left(x_n + \frac{1}{2}h\right)\left(y_n + \frac{1}{2}h(1 - x_n y_n)\right)\right], \end{aligned}$$

mit $x_0 = 1, y_0 = 0$ und $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ erhält man

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left[1 - \left(x_n + \frac{1}{4}\right)\left(y_n + \frac{1}{4}(1 - x_n y_n)\right)\right].$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 + \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(0 + \frac{1}{4}(1 - 1 \cdot 0)\right)\right] = \frac{11}{32}, \\ y_2 &= \frac{11}{32} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{11}{32} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{32}\right)\right)\right] = \frac{895}{2048} \approx 0.437, \end{aligned}$$

d.h. die Näherungslösung im Punkt $x_2 = 2$ ist durch $y(2) \approx 0.437$ gegeben.

(b) Damit $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{3}(f(\alpha) + f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta))$ für alle quadratischen Polynome $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt, muss dies für $f(x) = 1$, $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ gelten (hierbei ist es wegen der Linearität egal, ob man hier $a = 0$ zulässt oder $a \neq 0$ verlangt: Gleichheit für $x^2 + bx + c$ und x^2 impliziert Gleichheit für $bx + c$).
Die Formel ist für $f(x) = 1$ immer exakt. Exaktheit für $f(x) = x$ führt auf $0 = \frac{2}{3}(\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2} + \beta)$, also auf $\beta = -\alpha$. Verwenden wir dies, so führt Exaktheit für $f(x) = x^2$ auf $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\alpha^2 + \alpha^2)$, also auf $\alpha^2 = 1/2$, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$. Die geforderte Exaktheit erhalten wir also mit

$$\{\alpha, \beta\} = \{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}.$$

Aufgabe 6

Das Finite-Differenzen-Schema für das gegebene Randwertproblem mit $h = \frac{4-0}{4} = 1$ und $x_i = i \cdot h, i = 1, \ldots, 3$ lautet

$$\underbrace{\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}}_{\approx y''(x_i)} + \underbrace{y_i}_{\approx y(x_i)} = x_i^2 + 1, \quad i = 1, \ldots, 3,$$

$$\iff \quad y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = h^2(x_i^2 + 1), \quad i = 1, \ldots, 3.$$

Die Randbedinungen implizieren $y_0 = y(0) = -1$ und $y_4 = y(4) = 15$.
Daraus ergibt sich das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Auflösen dieses Systems liefert

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 8,$$

d.h. $y(3) \approx y_3 = 8$.