Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

Frühjahr 2016
30.03.2016

Numerische Methoden
für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

MODULPRÜFUNG
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

(a) Die LR-Zerlegung mit Pivotisierung liefert die folgenden Matrizen.
Wir setzen zu Beginn $A^{(1)} := A$.
1. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $4 = \left|a_{21}^{(1)}\right| = \max_{1\leq i\leq 3}\left|a_{i1}^{(1)}\right|$ wird die erste mit der zweiten Zeile vertauscht. Dies leistet die Permutationsmatrix

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Durch Linksmultiplikation von $A^{(1)}$ mit dieser Permutationsmatrix erhalten wir also

$$\tilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Für $i = 2, 3$ setzen wir $l_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}}$ und

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Linksmultiplikation von $\tilde{A}^{(1)}$ mit L_1 bewirkt gerade die Elimination der Elemente der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen, es ist

$$A^{(2)} := L_1 \tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Da $2 = \left|a_{32}^{(2)}\right| = \max_{2\leq i\leq 3}\left|a_{i2}^{(2)}\right|$ wird die zweite mit der dritten Zeile vertauscht. Dies leistet die Permutationsmatrix

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Durch Linksmultiplikation von $A^{(2)}$ mit dieser Permutationsmatrix erhalten wir also

$$\tilde{A}^{(2)} := P_2 \tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Da $a_{32}^{(2)} = 0$ ist keine Elimination notwendig. Deswegen setzen wir $L_2 = E$ und $\tilde{A}^{(3)} := L_2\tilde{A}^{(2)}$.
Fassen wir alle Schritte zusammen, so erhalten wir

$$A^{(3)} = L_2P_2L_1P_1A = \underbrace{L_2}_{=E}\underbrace{(P_2L_1P_2)}_{=\tilde{L}_1}\underbrace{(P_2P_1)}_{=:P}A = \tilde{L}_1PA.$$

Folglich ist

$$PA = \underbrace{\tilde{L}_1^{-1}}_{=:L}\underbrace{A^{(3)}}_{=:R} = LR$$

mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Um mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, verwenden wir folgende äquivalente Umformungen

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad PAx = Pb \quad \Longleftrightarrow \quad LRx = Pb.$$

Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} Ly &= Pb, \\ Rx &= y. \end{aligned}$$

Fur das erste System $Ly = Pb$, also

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix},$$

erhält man durch Vorwärtseinsetzen $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bei dem zweiten System $Rx = y$, also

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix},$$

erhält man durch Rückwärtseinsetzen $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ als Lösung.

Aufgabe 2

(a) Für den relativen Fehler der Lösung bezüglich der Spaltensummennorm gilt die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq \operatorname{cond}_1(A)\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1},$$

wobei

$$\operatorname{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \max\{|0| + |-2|, |1| + |-3|\} \cdot \max\{\left|-\tfrac{3}{2}\right| + |1|, \left|-\tfrac{1}{2}\right| + |0|\} = 10.$$

Daraus erhalten wir für den relativen Fehler der Lösung die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-3}.$$

(b) Die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration lauten

$$z^1 = Ax^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x^1 = \frac{z^1}{z_2^1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$z^2 = Ax^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}, \quad x^2 = \frac{z^2}{z_2^2} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Näherung im zweiten Schritt ergibt sich durch $z_{i_k}^{k+1}$ für $k=1$, also $z_2^2 = -\frac{7}{3}$.

(c) Die inverse Iteration von Wielandt wird wie folgt durchgeführt

$$w^1 = A^{-1}y^0 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y^1 = \frac{w^1}{w_1^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$
$$w^2 = A^{-1}y^1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y^2 = \frac{w^2}{w_1^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{6}{7} \end{bmatrix}.$$

Die Näherung im zweiten Schritt ergibt sich durch $\frac{1}{w_{i_k}^{k+1}}$ für $k=1$, also $\frac{1}{w_1^2} = -\frac{7}{6}$.

Aufgabe 3

Zunächst muss das Problem auf Normalform gebracht werden. Wir definieren dazu die neue Variable $\tilde{x}_1 = x_1 - 3$. Die Nebenbedingungen lauten jetzt

$$\begin{aligned} 2(\tilde{x}_1 + 3) + 4x_2 + x_3 &\leq 8, \\ -2(\tilde{x}_1 + 3) + 7x_2 &\geq -14, \\ \tilde{x}_1, x_2 &\geq 0, \\ 0 \leq x_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

und die sind zu

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 2, \\ 2\tilde{x}_1 - 7x_2 &\leq 8, \\ x_3 &\leq 1, \\ \tilde{x}_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

äquivalent. Die Zielfunktion ist jetzt $z(\tilde{x}_1, x_2, x_3) = \underbrace{4\tilde{x}_1 - 2x_2 + 3x_3}_{=:g(\tilde{x}_1, x_2, x_3)} + 4$.

Das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus lautet

	$\tilde{x}_1$	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
y_1	$\boxed{2}$	4	1	1	0	0	2
y_2	2	-7	0	0	1	0	8
y_3	0	0	1	0	0	1	1
	-4	2	-3	0	0	0	0

Unter den negativen Einträgen in der Zielfunktionszeile hat -4 den größten Betrag, d.h. die erste Spalte ist Pivotspalte. Außerdem ist $a_{11} = 2$ Pivotelement, da $\frac{b_1}{a_{11}} = 1 < 4 = \frac{b_2}{a_{21}}$ ist.
Wir tauschen die Basisvariable y_1 gegen $\tilde{x}_1$ aus. Die Zeilenumformungen liefern

	$\tilde{x}_1$	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
$\tilde{x}_1$	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
y_2	0	-11	-1	-1	1	0	6
y_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1
	0	10	-1	2	0	0	4

Das einzige negative Element in der Zielfunktionszeile ist -1, also ist die dritte Spalte die Pivotspalte. Wegen $\frac{b_3}{a_{33}} = 1 < 2 = \frac{b_1}{a_{13}}$ ist das Element $a_{33} = 1$ das Pivotelement.
Durch Zeilenumformungen und Austausch der Basisvariable ergibt sich

	$\tilde{x}_1$	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
$\tilde{x}_1$	1	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	0	-11	0	-1	1	1	7
x_3	0	0	1	0	0	1	1
	0	10	0	2	0	1	5

Alle Einträge in der Zielfunktionszeile sind ≥ 0, der Simplex-Algorithmus terminiert.
Der optimale Wert der Zielfunktion $z(\tilde{x}_1, x_2, x_3)$ ist

$$9 = \underbrace{5}_{=g_{\max}(\tilde{x}_1, x_2, x_3)} + 4 = 4\tilde{x}_1 + 3x_3 + 4 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 4.$$

Aufgabe 4

(a) Die Simpson-Regel zur Näherung von $\int\limits_a^b f(x)dx$ lautet

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)$$

In der Aufgabe sind $a = -1, b = 1$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}$, also

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx = \frac{1-(-1)}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{(-1)^3+2}} + 4\frac{1}{\sqrt{0^3+2}} + \frac{1}{\sqrt{1^3+2}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\Big(1 + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \approx 1.4686.$$

(b) (i) Für

$$F(x) = e^x - e^{-x} - 5x + 3,$$

gilt

$$F(1) = e - e^{-1} - 5 + 3 \approx 0.35 > 0,$$
$$F(2) = e^2 - e^{-2} - 10 + 3 \approx 0.25 > 0,$$
$$F\big(\tfrac{3}{2}\big) = e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} - \frac{15}{2} + 3 \approx -0.24 < 0.$$

Da F stetig ist, besitzt F nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle x^* im Intervall $\big(1, \frac{3}{2}\big) \cup \big(\frac{3}{2}, 2\big)$.

(ii) Es ist

$$F'(x) = e^x + e^{-x} - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F lautet also

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{e^{x^k} - e^{-x^k} - 5x^k + 3}{e^{x^k} + e^{-x^k} - 5}.$$

Mit dem Startwert $x^0 = 0$ erhalten wir

$$x^1 = 0 - \frac{e^0 - e^{-0} - 5\cdot 0 + 3}{e^0 + e^{-0} - 5} = 1,$$
$$x^2 = 1 - \frac{e^1 - e^{-1} - 5\cdot 1 + 3}{e^1 + e^{-1} - 5} \approx 1.1831.$$

Aufgabe 5 Das gegebene Anfangswertproblem ist zu

$$y'(x) = \underbrace{4 - 2\frac{y(x)}{x}}_{=:f(x,y(x))} \quad \text{mit} \quad y(1) = 1$$

äquivalent.

(a) Das Verfahren von Heun zu diesem Anfangswertproblem lautet

$$y_{n+1} = y_n + h\cdot\frac{1}{2}\Big(f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\Big)$$

mit $x_0 = 1, y_0 = 1$ und $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für die Schrittweite $h = 2$ erhält man

$$y_1 = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\Big(f(1,1) + f\big(1+2, 1+2f(1,1)\big)\Big)$$
$$= 1 + 2 + f(3,5) = 3 + \frac{2}{3} \approx 3.67,$$

d.h. die Näherungslösung im Punkt $x_1 = 3$ ist durch $y_1 \approx 3.67$ gegeben.

(b) Das Halbschrittverfahren zum gegebenen Anfangswertproblem lautet

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

mit $x_0 = 1, y_0 = 1$ und $x_n = x_0 + nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für die Schrittweite $h = 1$ erhält man

$$y_1 = 1 + f\big(1 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{2}f(1,1)\big) = 1 + f\big(\tfrac{3}{2}, 2\big) = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$
$$y_2 = \frac{7}{3} + f\big(2 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{3} + \tfrac{1}{2}f(2, \tfrac{7}{3})\big) = \frac{7}{3} + f\big(\tfrac{5}{2}, \tfrac{19}{6}\big) = \frac{7}{3} + \frac{22}{15} = \frac{57}{15} = 3.8,$$

d.h. die Näherungslösung im Punkt $x_2 = 3$ ist durch $y_2 = 3.8$ gegeben.

Aufgabe 6

Das Finite-Differenzen-Schema für das gegebene Randwertproblem mit $h = \frac{8-0}{4} = 2$ und $x_i = 2i\cdot h, i = 1, \ldots, 3$ lautet

$$\underbrace{\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2^2}}_{\approx y''(x_i)} + \underbrace{y_i}_{\approx y(x_i)} = \sin\left(\frac{\pi x_i}{4}\right), \quad i = 1, \ldots, 3,$$
$$\iff \quad y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1} = 4\sin\left(\frac{\pi x_i}{4}\right), \quad i = 1, \ldots, 3.$$

Die Randbedinungen implizieren $y_0 = y(0) = 0$ und $y_4 = y(8) = 1$.
Daraus ergibt sich das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) - 0 \\ 4sin\left(\frac{4\pi}{4}\right) \\ 4sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) - 1 \end{bmatrix} \quad \iff \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Auflösen dieses Systems liefert

$$y_1 = \frac{7}{4}, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = -\frac{11}{4},$$

d.h. $y(6) \approx y_3 = -\frac{11}{4}$.