Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

Frühjahr 2016
30.03.2016

Numerische Methoden

für die Fachrichtungen Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik

MODULPRÜFUNG

Name:

Matr.-Nr.:

1	2	3	4	5	6	$\sum$
						/24

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, eine untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass gilt

$$PA = LR.$$

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$. Sei Δb eine Störung der rechten Seite. Wie groß ist der relative Fehler (gemessen in der Spaltensummennorm) der Lösung höchstens, falls der relative Fehler der Störung höchstens 10^{-4} ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Führen Sie mit der Matrix A und dem Startvektor $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration durch. Geben Sie die im zweiten Schritt berechnete Näherung an den betragsgrößten Eigenwert von A an.

(c) Führen Sie zwei Schritte der inversen Iteration von Wielandt zum Startvektor $y^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ durch. Geben Sie die so berechnete Näherung an den betragskleinsten Eigenwert von A an.

Hinweis: Die Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist gegeben durch

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den maximalen Wert der Zielfunktion $z(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 8, \\ -2x_1 + 7x_2 &\geq -14, \\ x_1 &\geq 3, \\ x_2 &\geq 0, \\ 0 \leq x_3 &\leq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Simpson-Regel eine Näherung für

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^3+2}} dx.$$

(b) Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = e^x - e^{-x} - 5x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass F mindestens eine Nullstelle $x^* \in (1, 2)$ besitzt.

(ii) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F und führen Sie zwei Iterationen zum Startwert $x^0 = 0$ durch.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei y die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$xy'(x) = 4x - 2y(x) \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

Berechnen Sie Näherungswerte an $y(3)$ unter Verwendung

(a) des Verfahrens von Heun zur Schrittweite $h = 2$.

(b) des Halbschrittverfahrens zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Berechnen Sie eine Näherung für $y(6)$ der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), &\quad x \in (0, 8), \\ y(0) = 0, &\quad y(8) = 1 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = 2i$ für $i = 0, 1, \ldots, 4$.

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Donnerstag, den 28.04.2016, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 (Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) aus.

Die **Klausureinsicht** findet am Dienstag, dem 03.05.2016, von 17:30 bis 18:30 Uhr im Raum 2.066 (Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) statt.