

Numerische Methoden
(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)
5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei $p \in \{1, 2, \infty\}$. Zu den Normen $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{C}^m wird, wie in der Vorlesung erklärt wurde, durch

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad A \in \mathbb{C}^{m \times m},$$

eine Matrixnorm definiert. Zeigen Sie die folgenden Darstellungen der Matrixnormen.

- a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ ("Spaltensummennorm")
- b) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$ ("Spektralnorm")
- c) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ ("Zeilensummennorm")

Hierbei bezeichnet $\lambda_{\max}(A^H A)$ den größten Eigenwert der Matrix $A^H A$.

Aufgabe 2

- a) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ die Kondition der Matrix bezüglich der Spaltensummennorm, der Spektral- und der Zeilensummennorm (d.h. zu berechnen sind $\text{cond}_1(A)$, $\text{cond}_2(A)$ und $\text{cond}_\infty(A)$).
- b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\text{cond}_1(B)$ und $\text{cond}_\infty(B)$.

- c) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$. Es sei $b + \Delta b$ eine Störung der rechten Seite und $A + \Delta A$ eine Störung der Matrix A . Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler für x (gemessen in der $\|\cdot\|_1$ norm) der Lösung an, falls $\|\Delta b\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_1 10^{-2}$ und $\|\Delta A\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|_1 10^{-3}$.