Formelsammlung

Algorithmus 1.20 (Cholesky-Verfahren).
Für $i = 1, ..., m$
1. Für $k = 1, ..., i-1$ berechne $l_{ik} := \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{\mu=1}^{k-1} l_{i\mu} \bar{l}_{k\mu} \right)$.
2. Berechne $l_{ii} := \sqrt{a_{ii} - \sum_{\mu=1}^{i-1} |l_{i\mu}|^2}$.

Algorithmus 2.2 (Von-Mises Iteration).
Sei A eine diagonalisierbare $m \times m$-Matrix; wähle Startvektor $x_0 \in \mathbb{C}^m$. Iteration: Für $k = 1, 2, ...$ bilde die Vektoren

$$z_k := Ax_{k-1}, \qquad x_k := \frac{z_k}{(z_k)_{i_k}}$$

wobei der Index i_k so gewählt ist, dass gilt: $|(z_k)_{i_k}| = \max_{i=1}^m |(z_k)_i|$.
(Hier ist z.B $(z_k)_i$ die i-te Komponente des Vektors z_k)

Resultat 2.3 (Konvergenz der von Mises Iteration) Ist λ_1 der betragsmäßig größte Eigenwert von A dann unter gewisse Annahmen gilt:
1. $(z_{k+1})_{i_k} \to \lambda_1$ für $k \to \infty$
2. x_k nähert sich einem Vielfachen des Eigenvektors u_1 zu λ_1. Genauer: $x_k - \frac{u_1}{(u_1)_{i_k}} \to 0$.

Algorithmus 2.4 (Inverse Iteration von Wielandt).
Sei A eine diagonalisierbare reguläre $m \times m$-Matrix; wähle Startvektor $y_0 \in \mathbb{C}^m$. Iteration: Für $k = 1, 2, ...$ bilde die Vektoren

$$w_k := A^{-1} y_{k-1}, \qquad y_k := \frac{w_k}{(w_k)_{i_k}}$$

wobei der Index i_k so gewählt ist, dass gilt: $|(w_k)_{i_k}| = \max_{i=1}^m |(w_k)_i|$.

Inverse einer 2×2 **Matrix** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Resultat 2.5 (Konvergenz der inversen Iteration) Ist λ_m der betragsmäßig kleinste Eigenwert von A dann unter gewisse Annahmen gilt:
1. $(w_{k+1})_{i_k} \to \frac{1}{\lambda_m}$ für $k \to \infty$
2. y_k nähert sich einem Vielfachen des Eigenvektors u_m zu λ_m. Genauer: $y_k - \frac{u_m}{(u_m)_{i_k}} \to 0$.

Definition 3.2, 3.4 Ein Standardmodell ist ein lineares Optimierungsproblem, bei dem das Maximum der Zielfunktion $z(x) = \sum_{k=1}^n c_k x_k$ gesucht wird, wobei die m Nebenbedingungen $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leqslant b_i$, $i = 1, \ldots, m$ sowie $x_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n$ erfüllt sein müssen. Ist zusätzlich $b_i \geqslant 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ so ist das Standardmodell in Normalform.

Resultat 4.9 (Abschätzung des relativen Fehlers von x).
Sei $\|.\|$ eine Norm in $\mathbb{C}^n$ und auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ betrachten wir die Norm $|||B||| := \max_{\|v\|=1} \|Bv\|$. Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar und gilt $|||A^{-1}||| |||\Delta A||| < 1$, so lässt sich der relative Fehler der Lösung des gestörten linearen Gleichungssystems $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$, wie folgt abschätzen (hier $\mathrm{cond}_{|||.|||}(A) = |||A|||\ |||A^{-1}|||$):

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}_{|||.|||}(A)}{1 - \mathrm{cond}_{|||.|||}(A) \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}} \left(\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Satz 5.1 Konvergenz des Newtonschen Verfahrens.
Sei $F : [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2] \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar mit $F(x^*) = 0$. Sind α, β so gewählt, dass $|F'(x)| \geqslant \alpha > 0$ und $|F''(x)| \leqslant \beta$ für alle $x \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$ so gilt:

$$x_k \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2] \implies |x^* - x_{k+1}| \leqslant \frac{\beta}{2\alpha}|x^* - x_k|^2,$$

wobei x_k die folge des Newtonschen Verfahrens zum Startwert x_0 ist.

Falls zusätzlich $x_k \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$ für alle $k \in \{N\} \cup \{0\}$, und $|x^* - x_0| < \frac{2\alpha}{\beta}$ gilt, so konvergiert x_k gegen x^* für $k \to \infty$.
Bemerkung: Das Theorem gilt auch, wenn das Intervall $[x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$ überall durch $(x^* - \delta_1, x^* + \delta_2)$ erstetzt wird.

Satz 6 (Fehler der Trapezregel). Ist f zweimal stetig differenzierbar auf [a,b], so gilt die Fehlerdarstellung der Trapezregel (ohne Zerlegung des Intervalles)

$$R(f) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Simpsonregel $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$ (ohne Zerlegung des Intervalles)

Ein Schritt Verfahren für $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit Schrittweite h: $\begin{cases} x_n = x_0 + nh, \\ y_n = y_{n-1} + h\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h) \end{cases}$

Lokaler Diskritisierungsfehler für $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, $\Theta(x, y, h) = \Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h)$, wobei $\Delta(x, y, z) = \begin{cases} \frac{y(x+h)-y(x)}{h}, h \neq 0 \\ f(x, y), h = 0 \end{cases}$. Konsistenzordnung p falls $\Theta(x, y, h) = O(h^p)$, wenn $h \to 0$ für alle $(x, y) \in G$ und alle $f \in C^p$.

Eulersches Verfahren Runge Kutta Verfahren der Konsistenzordnung 2.

$$\Phi_\beta(x, y, h) = (1 - \beta)f(x, y) + \beta f(x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta}f(x, y)), \ \beta > 0$$

Halbschrittverfahren: $\beta = 1$ Heun Verfahren $\beta = \frac{1}{2}$ (Eulersches Verfahren $\beta = 0$)

Taylorreihe von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um x_0: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Approximation der zweiten Ableitung für C^4 Funktionen $y''(x) = \frac{y(x+h)+y(x-h)-2y(x)}{h^2} + O(h^2)$

Normen

1. $||A||_1 = \max\limits_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ ("Spaltensummennorm")
2. $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^H A)}$ ("Spektralnorm")
3. $||A||_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ ("Zeilensummennorm")