Karlsruher Institut für Technology (KIT)
Institute für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2019
04.03.2019

Modulklausur Numerische Methoden.

Bemerkung: Sie brauchen 40 von 120 Punkten um die Klausur zu bestehen

Aufgabe 1 (14 + 6 Punkte)

a) Gegeben ist die Matrix A und die Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & -9 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Zeilenumformungen bzw. Zeilenvertauschungen die in jedem Schritt durchgeführt wurden an. Verwenden Sie diese und falls nötig noch weitere, um eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit normierter Diagonale und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ zu bestimmen so, dass $PA = LR$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Erklären Sie warum im Teil **a)** keine Spaltenpivotisierung verwendet wurde. Geben Sie **nur die erste** Zeilenumformung oder Zeilenvertauschung an, die man an der Matrix A durchführen müsste, wenn man Spaltenpivotisierung verwenden würde. Was ist der Grund, dass die Spaltenpivotisierung manchmal verwendet wird?

Aufgabe 2 (4 + 16 Punkte)

a) Ist das Maximierungsproblem $Z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_1 - x_2 + x_3 \leqslant -1,\ x_1 \geqslant 0,$ $x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$ ein Standardmodell? Ist es in Normalform? Begründen Sie Ihre Antworten. Sie müssen das Problem **nicht** lösen.

b) Für jedes der folgenden Optimierungsprobleme führen Sie **nur einen** Schritt des Simplex Algorithmus (nur einmal Eckpunkt wechseln) durch. Wählen Sie nach dem Schritt eine der folgenden drei Möglichkeiten:
(a) Optimalität ist erreicht (in diesem Fall geben Sie den maximalen Wert an),
(b) es gibt kein Maximum der Zielfunktion,
(c) weitere Schritte müssen durchgeführt werden um eine Antwort zu bekommen.
Begründen Sie Ihre Wahl. Im Fall (c) müssen keine weiteren Schritte durchgeführt werden.

$$\text{(i)} \begin{cases} z(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 3, \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 8, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} z(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (14 + 6 Punkte)

a) Wir betrachten das Integral $\int_{-1}^{1} \sin(x^2)dx$. Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = 1$ eine Näherung des Integrals. Sei R_h der Approximationsfehler der zusammengesetzten Trapezregel in Abhängigkeit von h. Zeigen Sie, dass $|R_h| \leqslant h^2$.

b) Für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = a_0 g(-1) + a_1 g(0.5) + a_2 g(1) + R(g).$$

Leiten Sie ein lineares Gleichungssystem her, das von a_0, a_1, a_2 erfüllt wird genau dann wenn die Quadraturformel exakt ist für alle Polynome vom Grad $\leqslant 2$. Sie müssen das System **nicht** lösen.

Aufgabe 4 (12 + 8 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nach Anwendung des von Mises Iterationsverfahrens (Algorithmus 2.2. der Formelsammlung) zum Startvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man die Vektoren

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.5 \end{pmatrix}, z_4 = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die ersten drei Terme der Folge $(z_{k+1})_{i_k}$ (i_k wie in Algorithmus 2.2 der Formelsammlung gegeben) und den Grenzwert der Folge $(z_{k+1})_{i_k}$. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. In der Vorlesung haben wir definiert

$$\|A\|_\infty := \sup_{v \in \mathbb{C}^2, \|v\|_\infty = 1} \|Av\|_\infty, \qquad \text{wobei} \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max\{|v_1|, |v_2|\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass

$$\|A\|_\infty \leqslant \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}$$

(wie bekannt gilt Gleichheit, aber Sie müssen **nur** die Ungleichung zeigen).

Aufgabe 5 (12 + 8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Halbschrittverfahren (siehe Formelsammlung) Konsistenzordnung 2 hat.

b) Wir betrachten das Randwertproblem $y''(x) - y(x) = e^x \cos(\pi x)$, $y(0) = 1, y(4) = -1$. Mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ leiten Sie ein Gleichungssystem für eine Näherung y_i der Werte $y(x_i), i = 1, 2, 3$ her. Sie müssen das System **nicht** lösen.

Aufgabe 6 (4 + 6 + 10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 + x - 2.1$.

a) Zeigen Sie, dass F genau eine Nullstelle x^* im Intervall $(1, 1.1)$ hat.

b) Wir betrachten das Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 = 1$. Die Iterierten des zugehörigen Newton-Verfahrens im Schritt k seien mit x_k bezeichnet. Wie bekannt gilt $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$. Leiten Sie diese Formel her und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe x_1.

c) (i) Zeigen Sie, dass $|x_k - x^*| < 0.1 \implies |x_{k+1} - x^*| \leqslant 2|x_k - x^*|^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass $|x_k - x^*| < 0.1$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und, dass x_k gegen x^* konvergiert.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse liegen ab Dienstag den **24.04.2019** neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30).

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **02.05.2019**, von 17:00 bis 18:00 Uhr im Messtechnik Hörsaal (Geb. 30.33) statt.