Karlsruher Institut für Technology (KIT)
Institute für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Sommer 2018
14.09.2018

Modulklausur Numerische Methoden.

Bemerkung: Sie brauchen 20 von 60 Punkten um die Klausur zu bestehen

Aufgabe 1 (7 + 3 Punkte)

a) Gegeben ist die Matrix A und die Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Zeilenumformungen bzw. Zeilenvertauschungen die in jedem Schritt durchgeführt wurden an. Verwenden Sie diese und falls nötig noch weitere, um eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit normierter Diagonale und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ zu bestimmen so, dass $PA = LR$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sei die hermitesche positiv definite Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $B = LL^H$.

Aufgabe 2 (2 + 8 Punkte)

a) Überführen Sie das Maximierungsproblem $Z(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \leqslant 2$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_1 + 2x_3 \geqslant 10$ in ein Maximierungsproblem in Standardform. Sie müssen das Problem **<u>nicht</u>** lösen.

b) Für jedes der folgenden Optimierungsprobleme führen Sie **<u>nur einen</u>** Schritt des Simplex Algorithmus (nur einmal Eckpunkt wechseln) durch. Wählen Sie nach dem Schritt eine der folgenden drei Möglichkeiten:
(a) Optimalität ist erreicht (in diesem Fall geben Sie den maximalen Wert an),
(b) es gibt kein Maximum der Zeilfunktion,
(c) weitere Schritte müssen durchgeführt werden um eine Antwort zu bekommen.
Begründen Sie Ihre Wahl. Im Fall (c) müssen keine weiteren Schritte durchgeführt werden.

$$\text{(i)} \begin{cases} z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (4 + 6 Punkte)

a) Wir betrachten das Integral $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$. Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = 1$, sowie mit der Simpsonregel ohne Zerlegung des Intervalls, eine Näherung des Integrals.

b) Wie groß ist h zu wählen zu garantieren, dass der Approximationsfehler R_h der zusammengesetzten Trapezregel erfüllt $|R_h| \leqslant e \cdot 10^{-6}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (6 + 4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$.

a) Nach Anwendung des von Wielandt Iterationsverfahrens (Algorithmus 2.4. der Formelsammlung) zum Startvektor $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.35 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0.5429 \\ -0.1571 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} -0.4579 \\ 0.2711 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die ersten drei Terme der Folge $(w_{k+1})_{i_k}$ (i_k wie in Algorithmus 2.4 der Formelsammlung gegeben) und den Grenzwert der Folge $(w_{k+1})_{i_k}$. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Die Lösung von $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es sei Δb der Fehler für b mit $\|\Delta b\|_1 \leqslant 10^{-5}$, bestimmen Sie für den Fehler Δx für x eine obere Schranke von $\|\Delta x\|_1$ unter der Annahme, dass es keinen Fehler für A gibt ($\Delta A = 0$).

Aufgabe 5 (6 + 4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Heun Verfahren Konsistenzordnung 2 hat.

b) Wir betrachten das Randwertproblem $y''(x) - y(x) = e^x \sin(x)$, $y(0) = 1, y(4) = -1$. Mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ leiten Sie ein Gleichungssystem für eine Näherung y_i der Werte $y(x_i), i = 1, 2, 3$ her. Sie müssen das System **nicht** lösen.

Aufgabe 6 (2 + 3 + 5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x - \sin(x) - 0.2$.

a) Zeigen Sie, dass F genau eine Nullstelle in $x^* \in (0.1, 0.2)$ hat.

b) Wir betrachten das Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 = 0.1$. Die Iterierten des zugehörigen Newton-Verfahrens im Schritt k seien mit x_k bezeichnet. Wie bekannt gilt $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$. Leiten Sie diese Formel her und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe x_1.

c) (i) Zeigen Sie, dass $|x_k - x^*| < 0.1 \implies |x_{k+1} - x^*| \leqslant 0.15|x_k - x^*|^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass $|x_k - x^*| < 0.1$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und, dass x_k gegen x^* konvergiert.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse liegen ab Dienstag den **16.10.2018** neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30).

Die Klausureinsicht findet am Freitag, den **19.10.2018**, von 16 bis 17:30 Uhr im Raum 1.067 (Geb.20.30) statt.