KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE SS 2018
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. I. Anapolitanos
M. Sc. G. Kokkala

NUMERISCHE METHODEN (ELEKTROTECHNIK, METEOROLOGIE, GEODÄSIE UND GEOINFORMATIK)

6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sin(x) - 0.5x - 0.1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Iterierten des zugehörigen Newton- Verfahrens im Schritt m seien mit x_m bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle $x^* \in (0, 0.3)$ hat.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f und führen Sie drei Iterationen zum Startwert $x_0 = 0.1$ durch.

c) Zeigen Sie die Ungleichung

$$|x_{m+1} - x^*| \leq \frac{2}{3}|x_m - x^*|^2, \quad \text{für } x_m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2).$$

Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass gilt:

$$x_m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2) \implies x_{m+1} \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2).$$

Begründen Sie, dass das Newton Verfahren zum Startwert $x_0 = 0.1$ konvergiert.

AUFGABE 2

Bestimmen Sie einen Näherungswert zum Integral

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)dx,$$

unter Verwendung der Simpsonregel,und unter Verwendung der Trapezregel zum Intervallänge $h = 1$. Ist R_h der Fehler der Trapezregel zum Intervallänge h, zeigen Sie, dass $|R_h| \leq h^2$.

AUFGABE 3

a) Bestimmen Sie $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = a_0 g(-1) + a_1 g(0.75) + a_2 g(1) + R(g)$$

für alle Polynome von Grad ≤ 2 exakt ist.

b) Bestimmen Sie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $x_0, x_2 \in [-1, 1]$ so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{1}{2}g(x_0) + a_1 g(0) + a_2 g(x_2) + R(g)$$

für alle Polynome von Grad ≤ 3 exakt ist.