Lokaler Diskritisierungsfehler.

Ist $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems. $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$.
$(x_0, y_0) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei G Gebiet und
$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$ auf G so heißt

die Funktion $\Delta(x_0, y_0, h) = \begin{cases} \dfrac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}, & h \neq 0 \\ f(x_0, y_0), & h = 0. \end{cases}$

exakter relativer Zuwachs der Lösung y. ferner bezeichnet man mit

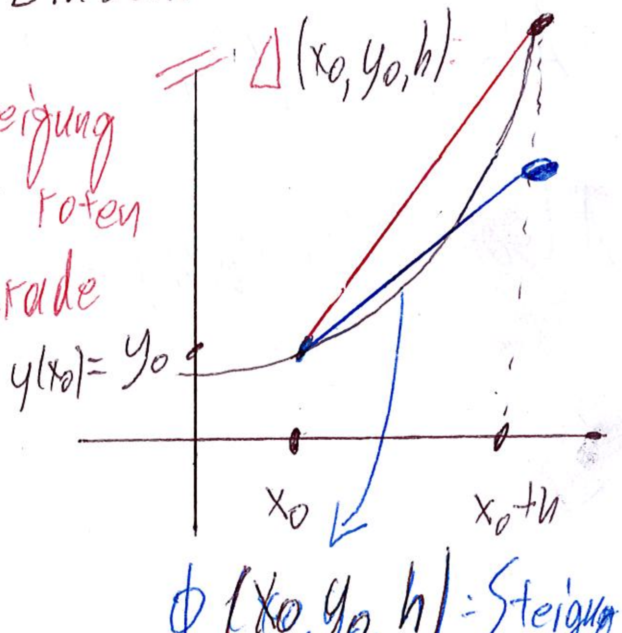
$$\theta(x_0, y_0, h) = \Delta(x_0, y_0, h) - \phi(x_0, y_0, h)$$

den lokalen Diskrietisierungsfehler des durch ϕ definierten Einschrittverfahrens.

Ein Einschrittverfahren hat die Konsistenzordnung p falls

$\theta(x, y, h) = O(h^p)$, $h \to 0$
$(x, y) \in G$.

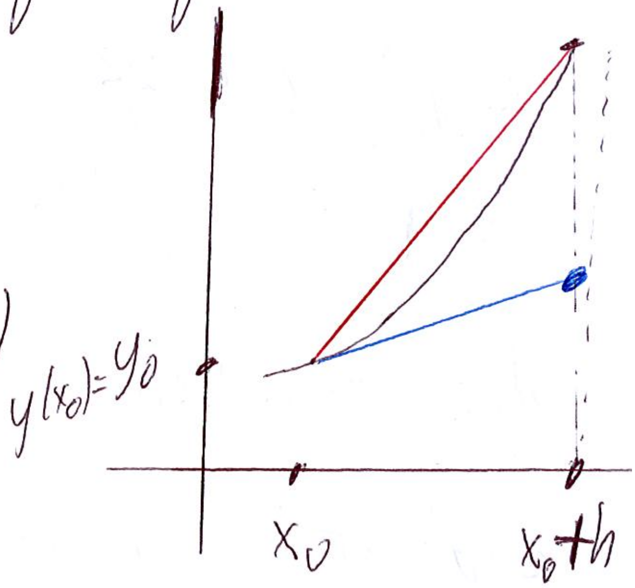
Steigung der roten Gerade $= \Delta(x_0, y_0, h)$



$\phi(x_0, y_0, h)$: Steigung der approximierenden blauen Gerade.

und wenn $p \geq 1$ heißt das Verfahren Konsistent. In diesem Fall gilt $\phi(x,y,0)=f(x,y)$

Bsp: 7.2 Eulersches Polygonzugverfahren.



$\phi(x_0,y_0,h)=f(x,y)$.

$$\theta(x_0,y_0,h)=\Delta(x_0,y_0,h)-\phi(x_0,y_0,h)$$

$$=\frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h}-f(x_0,y_0)$$

$\phi(x_0,y_0,h)=f(x_0,y_0)$.

$$=\frac{\left(\cancel{y(x_0)}+hy'(x_0)+O(h^2)\right)-\cancel{y(x_0)}}{h}-f(x_0,y_0).$$

Aber $y'(x_0)=f(x_0,y(x_0))=f(x_0,y_0)$.

Also $\theta(x_0,y_0,h)=f(x_0,y_0)+O(h)-f(x_0,y_0)=O(h)$.