06.09.2019
PD Dr. Peer Kunstmann

Numerische Methoden

Modulprüfung

Aufgabe 1 (10 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$\text{die Matrix } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 0 & 9 & 27 \\ 14 & 27 & 251 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} 210 \\ 477 \\ 3981 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A.

(b) Lösen Sie mithilfe der in (a) bestimmten Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 2 (6 + 10 + 4 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \Delta A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ für } \varepsilon > 0, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Bestimmen Sie die Kondition $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

(b) Wie muss $\varepsilon > 0$ gewählt werden, damit ein relativer Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm des gestörten Problems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

kleiner als 10^{-5} gewährleistet werden kann?

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, verwenden Sie dabei die Formel $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Aufgabe 3 (14 + 6 = 20 Punkte)

Gegeben seien die folgenden zwei Optimierungsprobleme

(1) Maximiere $Z_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 3$

$$\text{unter} \begin{cases} x_1 + x_2 & \le -1, \\ x_1 - x_2 & \le 5, \\ x_1 \ge 0 & \text{und } x_2 \ge -4. \end{cases}$$

(2) Maximiere $Z_2(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 + 3$

$$\text{unter} \begin{cases} x_1 + x_2 & \le -1, \\ x_1 - x_2 & \le 5, \\ x_1 \ge 0 & \text{und } x_2 \ge -4. \end{cases}$$

(a) Bringen Sie das Optimierungsproblem (1) auf Normalform und lösen Sie es mithilfe des Simplex-Algorithmus.

(b) Wie ändert sich das Simplex-Tableau im Vergleich zu (1) nach dem ersten Schritt, wenn Sie nun das Optimierungsproblem (2) anschauen? Geben Sie das dazugehörige Simplex-Tableau nach einem Schritt zum Optimierungsproblem (2) an. Existiert eine Lösung in (2)? Begründen Sie ihre Antwort und geben sie gegebenenfalls die Lösung an.

Aufgabe 4 (6 + 8 + 6 = 20 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 5$ und zeigen Sie, dass diese Funktion eine eindeutige Nullstelle auf einem Intervall $I = \left[2, \frac{5}{2}\right]$ hat.

(b) Gegeben ist der Startwert $x^0 = 2$. Begründen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahren in diesem Fall.

(c) Wie viele Schritte des Newton-Verfahren werden dabei benötigt, wenn man $\sqrt{5}$ auf drei bzw. auf sechs Nachkommastellen genau (d.h. mit einem Fehler kleiner als 10^{-3} bzw. 10^{-6}) bestimmen will.

Aufgabe 5 (4 + 6 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$I = \int_{-2}^{2} 5^x \mathrm{d}x = \frac{624}{25\ln(5)} \approx 15.5085.$$

(a) Approximieren Sie den Wert I des Integrals mit Hilfe der Trapez- und der Simpsonregel.

(b) Schätzen Sie für beide Näherungen den Fehler ab und vergleichen Sie die Abschätzungen mit dem wirklichen Fehler.

(c) Gegeben sei folgende Quadraturvorschrift

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx a_{-1}g(-1) + a_0 g(0) + g(x_1)\,.$$

Bestimmen Sie die Gewichte a_{-1} und a_0, sowie die Stützstelle $x_1 \in [-1, 1]$ so, dass die obige Quadraturformel exakt ist für alle Polynome bis einschließlich zum Grad zwei.

Aufgabe 6 (3 + 7 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= y^2(x)\cos(x), \\ y(0) &= -1. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $y\colon \left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{1+\sin(x)}$ das obige Anfangswertproblem löst.

(b) Approximieren Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{\pi}{4}$ den Funktionswert $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Was ist der tatsächliche Wert? (**Hinweis**: Es ist $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.)

(c) Berechnen Sie eine Näherung für $y(3)$ der Lösung y mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, \ldots, 4$ für das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) &= 2^x - y(x) + 3, \\ y(0) &= 0, \\ y(4) &= 11. \end{aligned}$$

Viel Erfolg!

Hinweise: Ergebnisse dieser Modulprüfung werden spätestens am Freitag, den 11.10.2019 im Mathematik Gebäude (20.30) im zweiten Stock veröffentlicht.
Die Klausureinsicht findet am Montag, den 14.10.2019 von 17.30 Uhr bis 18.30 Uhr statt im Seminarraum 1.067 im Mathematik Gebäude (20.30).
Genaueres wird sich online auf der Homepage der Vorlesung finden.