06.09.2019
PD Dr. Peer Kunstmann

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zur Modulprüfung

Aufgabe 1 (10 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$\text{die Matrix } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 0 & 9 & 27 \\ 14 & 27 & 251 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} 210 \\ 477 \\ 3981 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A.

(b) Lösen Sie mithilfe der in (a) bestimmten Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Wir gehen Schrittweise vor wie in Algorithmus 1.20. Zu berechnen ist die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. $i = 1$: Hier haben wir nur

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2.$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Schritt 2. $i = 2$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{0}{2} = 0, \; l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{9 - 0^2} = \sqrt{9 - 0} = \sqrt{9} = 3, \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{14}{2} = 7. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. $i = 3$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{32} &= \frac{1}{l_{22}} \left(a_{32} - l_{31}\overline{l_{21}} \right) = \frac{1}{3} \left(27 - 7 \cdot \overline{0} \right) = \frac{27 - 7 \cdot 0}{3} = \frac{27 - 0}{3} = \frac{27}{3} = 9, \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{251 - 7^2 - 9^2} = \sqrt{251 - 49 - 81} = \sqrt{121} = 11. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit

$$A = LL^H = LL^T,$$

da die Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist. Nun ist, da $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist:

$$L^H = \overline{L}^T = L^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt nun die folgende Zerlegung von der Matrix A:

$$A = LL^H = LL^T.$$

(b) Nun ist:

$$L^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Wir gehen dabei wieder in mehreren Schritten vor.
Schritt 0. Umformen: Es gilt nach Teil (a):

$$b = Ax = L\underbrace{L^T x}_{=:y} = Ly.$$

Schritt 1. Vorwärtseinsetzen: Lösen wir zuerst das lineare Gleichungssystem $Ly = b$. Dazu muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 210 \\ 477 \\ 3981 \end{pmatrix} = b \overset{!}{=} Ly = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 210 \\ 0 & 3 & 0 & 477 \\ 7 & 9 & 11 & 3981 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 105 \\ 0 & 1 & 0 & 159 \\ 7 & 9 & 11 & 3981 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-7) \\ \cdot(-9) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 105 \\ 0 & 1 & 0 & 159 \\ 0 & 0 & 11 & 1815 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ \cdot\frac{1}{11} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 105 \\ 0 & 1 & 0 & 159 \\ 0 & 0 & 1 & 165 \end{array}\right)$$

Also ergibt sich für y:

$$y = \begin{pmatrix} 105 \\ 159 \\ 165 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Schritt 2. Rücksubstitution: Lösen wir nun $L^T x = y$. Dazu muss gelten

$$\begin{pmatrix} 105 \\ 159 \\ 165 \end{pmatrix} = y \overset{!}{=} L^T x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 7 & 105 \\ 0 & 3 & 9 & 159 \\ 0 & 0 & 11 & 165 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot\frac{1}{11} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 7 & 105 \\ 0 & 1 & 3 & 53 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \;\; \cdot(-7) \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 11 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Schritt 3. Lösungsvektoren x aufstellen: Die Lösung von dem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ lautet

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

$\square$

Aufgabe 2 (6 + 10 + 4 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \Delta A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ für } \varepsilon > 0,\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Bestimmen Sie die Kondition $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

(b) Wie muss $\varepsilon > 0$ gewählt werden, damit ein relativer Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm des gestörten Problems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

kleiner als 10^{-5} gewährleistet werden kann?

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, verwenden Sie dabei die Formel $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Wir berechnen zuerst die inverse Matrix A^{-1} zu der Matrix A:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(-1) & \cdot(-1) & \dots \\ + & + & + & \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Nach der Vorlesung bzw. der Übung können wir nun die $\|\cdot\|_\infty$-Norm der beiden Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $A^{-1} = \left(a_{ij}^{(-1)}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ bestimmen durch

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{1,\ n\} = n,$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(-1)}\right| = \max\{1,\ n\} = n.$$

Also gilt nun für die Kondition der Matrix A:

$$\operatorname{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = n \cdot n = n^2.$$

Bemerkung zur Notation: Für die Kondition einer Matrix A ist manchmal auch die Notation $\kappa(A)$ geläufig, dass hieße in unserem Fall:

$$\kappa(A) = \kappa_\infty(A) = \mathrm{cond}_\infty(A) = \mathrm{cond}(A) = n^2.$$

(b) Es ist nach der Vorlesung bzw. Übung:

$$\begin{aligned}
\|\Delta A\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left|(\Delta A)_{ij}\right| = \max\{\varepsilon,\ n\varepsilon\} = n\varepsilon,\\
\|I_n\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left|(I_n)_{ij}\right| = \max\{1\} = 1,\\
\|b\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |b_i| = \max\{1,\dots,n\} = n.
\end{aligned}$$

Setze $\Delta b = 0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\|\Delta b\|_\infty = 0$. Um die Abschätzung aus der Vorlesung für den relativen Fehler des gestörten Problem

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b = b$$

benutzen zu können, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$n^2\varepsilon = n \cdot n\varepsilon = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \cdot \|\Delta A\|_\infty < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{n^2}.$$

Weiter gilt laut der Fehlerabschätzung aus der Vorlesung für den relativen Fehler $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ des gestörten Problems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b = b$$

für $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n^2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\leq \frac{\|I_n\|_\infty \mathrm{cond}_\infty(A)}{1 - \|A^{-1}\|_\infty \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|}\right)\\
&= \frac{1 \cdot n^2}{1 - n^2\varepsilon} \cdot \left(\frac{n\varepsilon}{n} + \frac{0}{n}\right) = \frac{n^2}{1 - n^2\varepsilon}(\varepsilon + 0) = \frac{n^2\varepsilon}{1 - n^2\varepsilon} < 10^{-5}\\
&\Leftrightarrow\ n^2\varepsilon < 10^{-5}\left(1 - n^2\varepsilon\right) = 10^{-5} - 10^{-5}n^2\varepsilon\\
\Leftrightarrow\ n^2\left(1 + 10^{-5}\right)\varepsilon &= n^2\varepsilon + 10^{-5}n^2\varepsilon < 10^{-5}\\
&\Leftrightarrow\ 0 < \varepsilon < \frac{10^{-5}}{n^2\left(1 + 10^{-5}\right)} < \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

d.h. damit ein relativer Fehler kleiner als 10^{-5} gewährleistet werden kann, müssen wir

$$0 < \varepsilon < \frac{10^{-5}}{n^2\left(1 + 10^{-5}\right)}$$

wählen.

(c) Es gilt, da nach Aufgabenteil (a) die Matrix A invertierbar ist:

$$\begin{aligned}
&Ax = b \ \Leftrightarrow\ x = A^{-1}b\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0\\ -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ n-1\\ n - \sum_{k=1}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ n-1\\ n - \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ n-1\\ n - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ n-1\\ \frac{3}{2}n - \frac{n^2}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ gerade:

$$x = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ n-1\\ \frac{3}{2}n - \frac{n^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Aufgabe 3 (14 + 6 = 20 Punkte)

Gegeben seien die folgenden zwei Optimierungsprobleme

(1) Maximiere $Z_1(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 3$	(2) Maximiere $Z_2(x_1,x_2) = 2x_1 - 3x_2 + 3$
unter $\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq -1, \\ x_1 - x_2 & \leq 5, \\ x_1 \geq 0 & \text{und } x_2 \geq -4. \end{cases}$	unter $\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq -1, \\ x_1 - x_2 & \leq 5, \\ x_1 \geq 0 & \text{und } x_2 \geq -4. \end{cases}$

(a) Bringen Sie das Optimierungsproblem (1) auf Normalform und lösen Sie es mithilfe des Simplex-Algorithmus.

(b) Wie ändert sich das Simplex-Tableau im Vergleich zu (1) nach dem ersten Schritt, wenn Sie nun das Optimierungsproblem (2) anschauen? Geben Sie das dazugehörige Simplex-Tableau nach einem Schritt zum Optimierungsproblem (2) an. Existiert eine Lösung in (2)? Begründen Sie ihre Antwort und geben sie gegebenenfalls die Lösung an.

Lösung von Aufgabe 3

(a) Das Optimierungsproblem (1) lautet:

$$\text{Maximiere } Z_1(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 3$$
$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(*) \begin{cases} (I)\ \ x_1 + x_2 & \leq -1, \\ (II)\ \ x_1 - x_2 & \leq 5, \\ (III)\ \ x_1 \geq 0 & \text{und } x_2 \geq -4. \end{cases}$$

Schritt 1. In Standard- und Normalform bringen: Wir erhalten durch Umformen und Setzen anschließend:

$$\begin{aligned} (III) &\Rightarrow\ \widetilde{x}_1 := x_1 \geq 0\ \ (\text{d.h. } x_1 = \widetilde{x}_1), \\ (III) &\Rightarrow\ \widetilde{x}_2 := x_2 + 4 \geq 0\ \ (\text{d.h. } x_2 = \widetilde{x}_2 - 4), \\ (II) &\Rightarrow\ 5 \geq x_1 - x_2 = \widetilde{x}_1 - (\widetilde{x}_2 - 4) = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 + 4 \\ &\Leftrightarrow\ \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 \leq 5 - 4 = 1, \\ (I) &\Rightarrow\ -1 \geq x_1 + x_2 = \widetilde{x}_1 + (\widetilde{x}_2 - 4) = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 4 \\ &\Leftrightarrow\ \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 \leq -1 + 4 = 3. \end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$Z_1(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 3 = 2\widetilde{x}_1 + (\widetilde{x}_2 - 4) + 3 = 2\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 4 + 3 = 2\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 1.$$

Setze nun:

$$\widetilde{Z}_1(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) := 2\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2.$$

Nun lautet unser neues Optimierungsproblem, deren Nebenbedingungen äquivalent zu $(*)$ sind, in Standard- bzw. Normalenform:

$$\text{Maximiere } \widetilde{y}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) = 2\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2$$
$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(**) \begin{cases} \left(\widetilde{I}\right)\ \ \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 & \leq 3, \\ \left(\widetilde{II}\right)\ \ \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 & \leq 1, \\ \left(\widetilde{III}\right)\ \ \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 & \geq 0. \end{cases}$$

Schritt 2. Das Simplex-Tableau aufstellen: Dazu führen wir die Schlupfvariablen y_1 und y_2 ein mit

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + y_1 & = 3, \\ \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 + y_2 & = 1, \\ \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, y_1, y_2 & \geq 0. \end{cases}$$

Setze nun $n = 2$, $m = 2$ und

$$\widetilde{b}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{c}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das (Anfangs-)Simplex-Tableau lautet nun

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\widetilde{b}_1$
y_1	1	1	1	0	3
y_2	1	-1	0	1	1
$-\widetilde{c}_1$	-2	-1	0	0	0

Schritt 3. Durchführung des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\widetilde{b}$
y_1	1	1	1	0	3
y_2	1	-1	0	1	1
$-\widetilde{c}$	-2	-1	0	0	0

$\longleftarrow$ Pivotzeile

Pivotspalte (-2 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -2 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die erste Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 1 in der zweiten Zeile der war mit:

$$\frac{3}{1} = 3 > 1 = \frac{1}{1}.$$

Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\widetilde{b}$
y_1	1	1	1	0	3
y_2	1	-1	0	1	1
$-\widetilde{c}$	-2	-1	0	0	0

$+$ $\cdot(-1)$ $\cdot 2$ $+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$
y_1	0	2	1	-1	2
$\widetilde{x}_1$	1	-1	0	1	1
$\cdot$	0	-3	0	2	2

$\longleftarrow$ Pivotzeile

Pivotspalte (-5 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -3 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die dritte Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 2 der einzige positive war. Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$
y_1	0	2	1	-1	2
$\widetilde{x}_1$	1	-1	0	1	1
$\cdot$	0	-3	0	2	2

$\cdot\frac{1}{2}$ $\cdot 1$ $+$ $\cdot 3$ $+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$
$\widetilde{x}_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\widetilde{x}_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$\cdot$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	5

Der Simplex-Algorithmus bricht nun an dieser Stelle ab, da keine Pivotspalte mehr wählbar ist, d.h. dass das Maximum von $\widetilde{Z}_1$ im Punkt $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (2, 1)$ angenommen wird. Also nimmt die Funktion Z_1 ihr Maximum bei

$$x_1 = \widetilde{x}_1 = 2 \text{ und } x_2 = \widetilde{x}_2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

an mit dem Maximum:

$$Z_1\,(2, -3) = 2 \cdot 2 - 3 + 3 = 4 + 0 = 4.$$

(b) Der Unterschied der beiden Optimierungsprobleme (1) und (2) besteht nur in der Zielfunktion, d.h. wir erhalten für die Zielfunktion vom Optimierungsproblem (2):

$$Z_2(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 + 3 = 2\widetilde{x}_1 - 3(\widetilde{x}_2 - 4) + 3 = 2\widetilde{x}_1 - 3\widetilde{x}_2 + 12 + 3 = 2\widetilde{x}_1 - 3\widetilde{x}_2 + 15.$$

Also setzen wir als neue Zielfunktion

$$\widetilde{Z}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = 2\widetilde{x}_1 - 3\widetilde{x}_2.$$

Setze nun $n = 2$, $m = 2$ und

$$\widetilde{b}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{c}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen nun ein, dass sich an der Pivotzeile bzw. -spalte nichts ändert, sondern sich nur ein einziger Eintrag in der letzten Zeile des Simplex-Tableaus ändert. Demnach erhalten wir nach dem ersten Schritt des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$
y_1	0	2	1	-1	2
$\widetilde{x}_1$	1	-1	0	1	1
$\cdot$	0	1	0	2	2

Erneut bricht der Simplex-Algorithmus an dieser Stelle ab, da wir keine Pivotspalte mehr wählen können. Das Maximum der Zielfunktion $\widetilde{Z}_2$ wird somit im Punkt

$$(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (1, 0)$$

angenommen. Also wird das Maximum der Zielfunktion Z_2 bei

$$x_1 = \widetilde{x}_1 = 1 \text{ und } x_2 = \widetilde{x}_2 - 4 = 0 - 4 = -4$$

angenommen mit

$$Z_2(1, -4) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) + 3 = 2 + 12 + 3 = 17,$$

d.h. die Antwort ist "*ja*", es existiert eine Lösung. □

Aufgabe 4 (6 + 8 + 6 = 20 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 5$ und zeigen Sie, dass diese Funktion eine eindeutige Nullstelle auf einem Intervall $I = \left[2, \frac{5}{2}\right]$ hat.

(b) Gegeben ist der Startwert $x^0 = 2$. Begründen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahren in diesem Fall.

(c) Wie viele Schritte des Newton-Verfahren werden dabei benötigt, wenn man $\sqrt{5}$ auf drei bzw. auf sechs Nachkommastellen genau (d.h. mit einem Fehler kleiner als 10^{-3} bzw. 10^{-6}) bestimmen will.

Lösung von Aufgabe 4

(a) Wir setzen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 5.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1 < 0, \\ f\left(\sqrt{5}\right) &= \sqrt{5}^2 - 5 = 5 - 5 = 0, \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{25-20}{4} = \frac{5}{4} > 0. \end{aligned}$$

Weiter ist die Funktion f als Polynom insbesondere glatt mit den Ableitungen

$$f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2 \text{ und } f^{(n)}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 3.$$

Wegen

$$f'(x) = 2x > 0 \text{ für alle } x \in (0, \infty)$$

ist die Funktion f streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$, also insbesondere injektiv. Wegen der Stetigkeit der Funktion f folgt nun nach dem Nullstellensatz von Bolzano/ Zwischenwertsatz, dass es eine Stelle $x^* \in \left(2, \frac{5}{2}\right) =: I$ gibt mit

$$f\left(x^*\right) = 0.$$

Aus der Injektivität der Funktion f ergibt sich nun die Eindeutigkeit der Nullstelle x^* auf ganz $(0, \infty)$ und somit auch $\sqrt{5} = x^* \in I$. Weiter hat das Intervall I die Länge $\frac{1}{2}$ wegen

$$|I| = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir wählen $x^0 = 2$. So gilt nun:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= 2\,|x| \geq 2 \cdot 2 = 4 =: \alpha > 0 \text{ für alle } x \geq 2, \\ |f''(x)| &= 2 \leq 2 =: \beta \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir berechnen den Wachstumsquotienten

$$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4} < 1.$$

Wegen

$$\left|x^0 - x^*\right| = \left|2 - \sqrt{5}\right| < \frac{1}{2} < 4 = \frac{2\alpha}{\beta}$$

und $|I| = \frac{1}{2}$ folgt nun, dass die Folge der Newton-Iteration $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stets im Intervall I ist mit der Abschätzung

$$\left|x^{n+1} - \sqrt{5}\right| = \left|x^{n+1} - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^n - x^*\right|^2 = \frac{1}{4}\left|x^n - \sqrt{5}\right|^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und die Folge $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Newton-Iterierten konvergiert gegen die Nullstelle $x^* = \sqrt{5}$ der Funktion f.
Bemerkung: Laut der Newton Iterationsvorschrift haben wir

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f\left(x^n\right)}{f'\left(x^n\right)} = x^n - \frac{\left(x^n\right)^2 - 5}{2x^n} = \frac{2\left(x^n\right)^2 - \left(x^n\right)^2 + 5}{2x^n} = \frac{\left(x^n\right)^2 + 5}{2x^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen zeigen, dass für $x \in I$

$$\frac{x^2+5}{2x} < \frac{5}{2}$$

gilt. Dies stellen wir äquivalent um zu:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+5}{2x} < \frac{5}{2} &\Leftrightarrow\ x^2+5 < 5x \\ &\Leftrightarrow\ p(x) := x^2 - 5x + 5 < 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen vom Polynom p lassen sich mit Hilfe der Mitternachtsformel bestimmen durch:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x_2 &= \frac{5+\sqrt{5}}{2} > \frac{5}{2}, \\ x_1 &= \frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{5-\sqrt{4}}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} < 2. \end{aligned}$$

Also hat p keine Nullstelle in $\overline{I}$ und $p(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 5 = 4 - 10 + 5 = -1 < 0$, d.h.

$$p(x) < 0 \text{ für alle } x \in \overline{I}.$$

Nun zeigen wir per vollständiger Induktion, dass $x^n > 2$ ist mit

$$|x^n - x^*| < \frac{1}{4^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Indutionsanfang (I.A.) $n = 1$: Es gilt:

$$\left|x^1 - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^0 - x^*\right|^2 < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left|x^0 - x^*\right| = \frac{1}{8}\left|x^0 - x^*\right|,$$

da $2 = x^0 \in \overline{I}$ ist und $\left|x^0 - x^*\right| < \frac{1}{2}$. Daraus sehen wir nun, dass x^1 nicht kleiner gleich 2 sein kann, da sonst

$$\frac{1}{8}\left|x^0 - x^*\right| > \left|x^1 - x^*\right| = x^* - x^1 \geq x^* - x^0 = \left|x^0 - x^*\right|$$

gelten müsste wegen $x^* > 2 = x^0$, was ein Widerspruch ist, d.h. $x^1 > x^0 = 2$. Wegen dem obigen folgt nun auch $x^1 < \frac{5}{2}$, d.h. $x^1 \in I$.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für alle $k = 0, \dots, n$ gelte $x^k \in I$ sowie die Abschätzung

$$\left|x^k - x^*\right| < \frac{1}{4^k} \text{ und } \left|x^k - x^*\right| < \left|x^0 - x^*\right|.$$

Induktionsschritt (I.S.): Es gilt nun nach Induktionsvoraussetzung, da $x^n \in I$ ist:

$$\begin{aligned} \left|x^{n+1} - x^*\right| &\leq \frac{\beta}{2\alpha}|x^n - x^*|^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4^n}\right)^2 = \frac{1}{4^{2n+1}} < \frac{1}{4^{n+1}}, \\ \left|x^{n+1} - x^*\right| &\leq \frac{1}{4}|x^n - x^*|^2 < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|x^n - x^*| < \frac{1}{8}\left|x^0 - x^*\right| < \left|x^0 - x^*\right|. \end{aligned}$$

Nun muss $x^{n+1} > x_0 = 2$ sein, dawir sonst einen Widerspruch wie im Induktionsanfang erhalten:

$$\frac{1}{8}\left|x^0 - x^*\right| > \left|x^{n+1} - x^*\right| = x^* - x^{n+1} \geq x^* - x^0 = \left|x^0 - x^*\right|.$$

Also ist $x^{n+1} > 2$ und wegen dem Obigen auch $x^{n+1} < \frac{5}{2}$, da nach Induktionsvoraussetzung $x^n \in I$ war. Demnach ist $x^{n+1} \in I$.

Aus der Abschätzung haben wir nun auch die Konvergenz, denn es ist:

$$\lim_{n\to\infty} |x^n - x^*| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x^* = \sqrt{5}.$$

(c) Wir haben die Abschätzung

$$\left|x^{n+1} - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}|x^n - x^*|^2 = \frac{1}{4}|x^n - x^*|^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\left|x^0 - x^*\right| &\leq \frac{1}{2} < 1 = \frac{1}{10^0}, \\
\left|x^1 - x^*\right| &\leq \frac{1}{4}\left|x^0 - x^*\right|^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}, \\
\left|x^2 - x^*\right| &\leq \frac{1}{4}\left|x^1 - x^*\right|^2 < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}, \\
\left|x^3 - x^*\right| &\leq \frac{1}{4}\left|x^2 - x^*\right|^2 < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^6} < \frac{1}{10^6},
\end{aligned}
$$

d.h. dass das x^2 auf mindestens 3 Nachkommastellen genau ist und x^3 auf mindestens 6 Nachkommastellen genau, demnach brauchen wir 2 bzw. 3 Schritte.
Bemerkung: Alternativ können wir nach der Abschätzung für x^2 schon aufhören und die Vorlesung hier zitieren, da diese besagt, dass sich die Genauigkeit/ Anzahl der Nachkommastellen mit jedem Schritt mindestens verdoppelt.
Bemerkung: Laut der Newton Iterationsvorschrift haben wir

$$
x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} = x^n - \frac{(x^n)^2 - 5}{2x^n} = \frac{2(x^n)^2 - (x^n)^2 + 5}{2x^n} = \frac{(x^n)^2 + 5}{2x^n}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt nun:

$$
\begin{aligned}
x^0 &= 2, \\
x^1 &= \frac{(x^0)^2 + 5}{2x^0} = \frac{2^2 + 5}{2 \cdot 2} = \frac{4 + 5}{4} = \frac{9}{4} = 2.25, \\
x^2 &= \frac{(x^1)^2 + 5}{2x^1} = \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 5}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{\frac{81}{16} + 5}{\frac{9}{2}} = \frac{81 + 80}{16} \cdot \frac{2}{9} = \frac{161}{72} \approx 2.236.
\end{aligned}
$$

Also ist $\sqrt{5}$ auf 3 Nachkommastellen genau gerade

$$
\sqrt{5} = x^* \approx x^2 = 2.236.
$$

$\square$

Aufgabe 5 (4 + 6 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$I = \int_{-2}^{2} 5^x \mathrm{d}x = \frac{624}{25\ln(5)} \approx 15.5085.$$

(a) Approximieren Sie den Wert I des Integrals mit Hilfe der Trapez- und der Simpsonregel.

(b) Schätzen Sie für beide Näherungen den Fehler ab und vergleichen Sie die Abschätzungen mit dem wirklichen Fehler.

(c) Gegeben sei folgende Quadraturvorschrift

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx a_{-1}g(-1) + a_0 g(0) + g(x_1).$$

Bestimmen Sie die Gewichte a_{-1} und a_0, sowie die Stützstelle $x_1 \in [-1,1]$ so, dass die obige Quadraturformel exakt ist für alle Polynome bis einschließlich zum Grad zwei.

Lösung von Aufgabe 5

Wir setzen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5^x$$

und die Grenzen $a = -2$ und $b = 2$. Dann gilt:

$$I = \int_{-2}^{2} 5^x \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x.$$

Weiter haben wir die Darstellung:

$$f(x) = 5^x = \mathrm{e}^{\ln(5)x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Nach der Trapezregel gilt:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{2-(-2)}{2}\left(5^{-2}+5^2\right) = \frac{4}{2}\left(\frac{1}{25}+25\right) \\ &= 2\cdot\frac{1+625}{25} = \frac{2\cdot 626}{25} = \frac{1252}{25} = 50.08. \end{aligned}$$

Nach der Simpsonregel gilt:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) = \frac{2-(-2)}{6}\left(5^{-2}+4f\left(\frac{-2+2}{2}\right)+5^2\right) \\ &= \frac{4}{6}\left(\frac{1}{25}+4f(0)+25\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1+625}{25}+4\cdot 5^0\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{626}{25}+4\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{626+100}{25} = \frac{2\cdot 726}{75} = \frac{1452}{75} = 19.36. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist glatt mit den Ableitungen (laut Kettenregel):

$$f^{(n)}(x) = \ln(5)^n \mathrm{e}^{\ln(5)x} = \ln(5)^n 5^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \max_{x\in[-2,2]} |f''(x)| &= \max_{x\in[-2,2]} \left|\ln(5)^2 5^x\right| = \ln(5)^2 5^2 = 25\ln(5)^2 \approx 64.7573, \\ \max_{x\in[-2,2]} \left|f^{(4)}(x)\right| &= \max_{x\in[-2,2]} \left|\ln(5)^4 5^x\right| = \ln(5)^4 5^2 = 25\ln(5)^4 \approx 167.7401. \end{aligned}$$

Damit lautet der Fehler bei der Trapezregel:

$$|R_{\text{Trapez}}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\max_{x\in[-2,2]}|f''(x)| = \frac{(2-(-2))^3}{12}\cdot 25\ln(5)^2 = \frac{4^3}{12}\cdot 25\ln(5)^2$$

$$= \frac{16 \cdot 25}{3} \ln(5)^2 = \frac{400}{3} \ln(5)^2 \approx 345.3721.$$

Der echte Fehler bei der Trapezregel ist

$$|I - 50.08| \approx 50.08 - 15.5085 = 34.5715 << 345.3721 = |R_{\text{Trapez}}|.$$

Andererseits lautet der Fehler bei der Simpsonregel:

$$|R_{\text{Simpson}}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x\in[-2,2]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{(2-(-2))^5}{2880} \cdot 25\ln(5)^4 = \frac{4^5}{2880} \cdot 25\ln(5)^4$$
$$= \frac{16 \cdot 25}{45} \ln(5)^4 = \frac{400}{45} \ln(5)^4 \approx 59.6409.$$

Der echte Fehler bei der Simpsonregel ist

$$|I - 19.36| \approx 19.36 - 15.5085 = 3.8515 << 59.6409 = |R_{\text{Simpson}}|.$$

(c) Wir setzen

$$Q(g) := a_{-1}g(-1) + a_0 g(0) + g(x_1)$$

für alle stetigen Funktionen $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Es soll gelten:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p) \text{ für alle Polynome } p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit Grad kleiner gleich 2.}$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und der Funktion Q genügt es für uns die jeweiligen Monome p_0, p_1 und p_2 zu überprüfen. Wir erhalten somit aus der obigen Forderung:

$$p_0(x) = 1: \quad 2 = [1-(-1)] = [x]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_0(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p_0) = a_{-1}p_0(-1) + a_0 p_0(0) + p_0(x_1)$$
$$= a_{-1} + a_0 + 1,$$
$$\Leftrightarrow \; a_0 + a_1 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 = 1 - a_{-1},$$

$$p_1(x) = x: \quad 0 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p_1) = a_{-1}p_1(-1) + a_0 p_1(0) + p_1(x_1)$$
$$= -a_{-1} + a_0 \cdot 0 + x_1$$
$$= -a_{-1} + 0 + x_1 = -a_{-1} + x_1$$
$$\Leftrightarrow \; a_{-1} = x_1,$$

$$p_2(x) = x^2: \quad \frac{2}{3} = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_2(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p_2) = a_{-1}p_2(-1) + a_0 p_2(0) + p_2(x_1)$$
$$= (-1)^2 a_{-1} + a_0 \cdot 0^2 + x_1^2$$
$$= a_{-1} + 0 + x_1^2 = x_1^2 + x_1$$
$$\Leftrightarrow \; x_1^2 + x_1 - \frac{2}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x_1^2 + 3x_1 - 2 = 0.$$

Das Polynom $q(x) = 3x^2 + 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, hat laut der Mitternachtsformel die Nullstellen:

$$x^{(1,2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}.$$

Weiter gilt für die Nullstellen von dem Polynom q:

$$x^{(1)} = \frac{-3-\sqrt{33}}{6} < \frac{-3-\sqrt{25}}{6} = \frac{-3-5}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} < -1,$$
$$x^{(2)} = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} > \frac{-3+\sqrt{25}}{6} = \frac{-3+5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} > -1,$$
$$x^{(2)} = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} < \frac{-3+\sqrt{36}}{6} = \frac{-3+6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1,$$

d.h. $x^{(1)} \notin [-1,1]$, aber $x^{(2)} \in [-1,1]$. Daher ist wegen $x_1 \in [-1,1]$ gerade

$$a_{-1} = x_1 = \frac{\sqrt{33}-3}{6}.$$

Nun folgt noch

$$a_0 = 1 - a_{-1} = 1 - \frac{\sqrt{33}-3}{6} = \frac{6+3-\sqrt{33}}{6} = \frac{9-\sqrt{33}}{6}.$$

Also lautet die Quadraturformel gerade:

$$Q(g) = \frac{\sqrt{33}-3}{6} g(-1) + \frac{9-\sqrt{33}}{6} g(0) + g\left(\frac{\sqrt{33}-3}{6}\right).$$

□

Bemerkung: Für das Monom/ Polynom $p_3(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, ist Q schon nicht mehr exakt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
Q\left(p_3\right) &= (-1)^3 \frac{\sqrt{33}-3}{6} + \left(\frac{\sqrt{33}-3}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{33}-3}{6}\left[-1 + \left(\frac{\sqrt{33}-3}{6}\right)^2\right] \\
&= \frac{\sqrt{33}-3}{6} \cdot \frac{-36+33-6\sqrt{33}+9}{36} = \frac{\sqrt{33}-3}{6} \cdot \frac{6-6\sqrt{33}}{36} \\
&= \frac{\sqrt{33}-3}{6} \cdot \frac{1-\sqrt{33}}{6} = -\frac{\left(\sqrt{33}-3\right)\left(\sqrt{33}-1\right)}{36} \\
&\neq 0 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} \\
&= \int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_3(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6 (3 + 7 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= y^2(x)\cos(x), \\ y(0) &= -1. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $y\colon \left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{1+\sin(x)}$ das obige Anfangswertproblem löst.

(b) Approximieren Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{\pi}{4}$ den Funktionswert $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Was ist der tatsächliche Wert? (**Hinweis**: Es ist $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.)

(c) Berechnen Sie eine Näherung für $y(3)$ der Lösung y mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, \ldots, 4$ für das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) &= 2^x - y(x) + 3, \\ y(0) &= 0, \\ y(4) &= 11. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 6

(a) Wir bemerken erstmal, dass die Funktion y auf der Menge $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right)$ stetig differenzierbar ist und es gilt für die Ableitung nach der Kettenregel:

$$y'(x) = -\frac{-1}{(1-\sin(x))^2} \cdot \cos(x) = \left(-\frac{1}{1+\sin(x)}\right)^2 \cos(x) = y^2(x)\cos(x)$$

für alle $x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right)$. Weiter ist:

$$y(0) = -\frac{1}{1+\sin(0)} = -\frac{1}{1+0} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Also erfüllt die Funktion y die Differentialgleichung in der Aufgabenstellung.
(b) Sei die Schrittweite $h = \frac{\pi}{4} > 0$ und setze die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y^2\cos(x),$$

dann lautet die zu betrachtende Differentialgleichung gerade

$$\begin{aligned} y'(x) &= f\left(x, y(x)\right), \\ y\left(x_0\right) &= y_0, \end{aligned}$$

mit $x_0 = 0$ und $y_0 = -1$. Die Diskretisierungsfunktion Φ lautet für das Euler-Verfahren:

$$\Phi(x,y) = \Phi_0(x,y) = f(x,y) = y^2\cos(x) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ist $\widetilde{x} = \frac{\pi}{2}$, so benötigen wir

$$\mathbb{N} \ni N = \frac{\widetilde{x} - x_0}{h} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi} = 2$$

Schritte des Euler-Verfahrens, d.h. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx y_2$.
Schritt 1. $n = 1$: Es ist

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 1 \cdot h = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \\ f\left(x_0, y_0\right) &= f(0, -1) = (-1)^2 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1, \\ \Phi\left(x_0, y_0\right) &= f\left(x_0, y_0\right) = 1, \\ y_1 &= y_0 + h\Phi_0\left(x_0, y_0, h\right) = -1 + \frac{\pi}{4} \cdot 1 = -1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Schritt 2. $n = 2 = N$: Es ist

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 + 2 \cdot h = 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \widetilde{x}, \\ f\left(x_1, y_1\right) &= f\left(-1 + \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\Phi(x_1, y_1) = f(x_1, y_1) = \left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y_2 = y_1 + h\Phi(x_1, y_1, h) = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right).$$

Damit ist

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx y_2 = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right).$$

Wir berechnen mit Hilfe der Funktion aus Aufgabenteil (a):

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

(c) <u>Ziel</u>: Den Funktionswert $y(3)$ zu approximieren.
Setze dazu

$$x_0 = 0,\ x_4 = 4,\ y_0 := y(x_0) = y(0) = 0,\ y_4 := y(x_4) = y(4) = 11 \text{ und } N = 3.$$

Dann haben wir für das Finite-Differenzen Verfahren die Schrittweite h:

$$h = \frac{x_4 - x_0}{N+1} = \frac{4-0}{3+1} = 1 > 0,$$

d.h. $x_k = x_0 + kh = 0 + k = k$ für $k = 0, \ldots, 4$. Nach den zweiten Differenzen gilt:

$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + r(h) \text{ für alle } x \text{ und Schrittweiten } h > 0.$$

Setze daher

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} \approx y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1},$$

da die Schrittweite $h = 1$ ist, für alle $k = 1, 2, 3$ mit $y_k \approx y(x_k)$. Damit erhalten wir aus

$$y''(x_k) = 2^{x_k} - y(x_k) + 3 \text{ für } k = 1, 2, 3,$$

die Gleichung

$$y_{k-1} - y_k + y_{k+1} = (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) + y_k = 2^{x_k} + 3 \text{ für } k = 1, 2, 3.$$

Also ist für die einzelnen Werte von k:

$$\begin{aligned}
k = 1: &\qquad 0 - y_1 + y_2 = y_0 - y_1 + y_2 = 2^{x_1} + 3 = 2^1 + 3 = 2 + 3 = 5\\
&\qquad \Leftrightarrow\ -y_1 + y_2 = 5,\\
k = 2: &\qquad y_1 - y_2 + y_3 = 2^{x_2} + 3 = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7,\\
k = 3: &\qquad y_2 - y_3 + 11 = y_2 - y_3 + y_4 = 2^{x_3} + 3 = 2^3 + 3 = 8 + 3 = 11\\
&\qquad \Leftrightarrow\ y_2 - y_3 = 11.
\end{aligned}$$

Wir lösen nun dieses lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ + \end{array} \ \Big|\cdot(-1) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot 1 \end{array} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Also haben wir

$$y_0 = 0,\ y_1 = 7,\ y_2 = 12,\ y_3 = 12 \text{ und } y_4 = 11.$$

Also ist

$$y(3) = y(x_3) \approx y_3 = 12.$$

□