28.02.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann

Numerische Methoden

Modulprüfung

Aufgabe 1 (9 + 9 + 2 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$\text{die Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & \frac{5}{2} \\ 3 & 27 & 6 \\ 2 & 22 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} \frac{61}{2} \\ 75 \\ 61 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A und geben Sie die dazugehörige Permutationsmatrix P mit $PA = LR$ an.

(b) Lösen Sie mithilfe der in (a) bestimmten Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(c) Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2 (6 + 9 + 5 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ für } \varepsilon > 0,\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Für Matrizen $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definieren wir die Matrix-Norm: $\|M\|_{\mathrm{F}} = \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |m_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix-Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ verträglich mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ eine Matrix-Norm ist. Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle x, y\rangle_2| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Kondition $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_{\mathrm{F}}}(A)$.

(c) Wie muss $\varepsilon > 0$ gewählt werden, damit ein relativer Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm des gestörten Problems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

kleiner als 10^{-5} gewährleistet werden kann?

Aufgabe 3 (10 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben seien die folgenden zwei Optimierungsprobleme

(1) Maximiere $Z_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3$

$$\text{unter} \begin{cases} x_1 - x_3 & \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

(2) Minimiere $Z_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$

$$\text{unter} \begin{cases} 2x_1 - x_2 & \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 & \leq 5, \\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

(a) Bringen Sie das Optimierungsproblem (1) auf Normalform und lösen Sie es mithilfe des Simplex-Algorithmus.

(b) Bringen Sie das Optimierungsproblem (2) auf Normalform und lösen Sie es mithilfe des Simplex-Algorithmus.

Aufgabe 4 (8 + 4 + 8 = 20 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - \cos(x)$$
und zeigen Sie, dass diese Funktion eine eindeutige positive Nullstelle x^* hat und diese sich im Intervall $I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ befindet.
Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

(b) Gegeben ist der Startwert $x^0 = \frac{\pi}{3}$. Begründen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahren in diesem Fall.

(c) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens durch. Was für eine Genauigkeit liegt vor? Berücksichtigen Sie, dass für die Nullstelle $x^* \approx 0.824132$ gilt. Auf wie viele Nachkommastellen ist das Newton-Verfahren nach drei Schritten mindestens genau? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 5 (4 + 4 + 9 + 3 = 20 Punkte)

Gegeben sei das Integral
$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals I. Approximieren Sie den Wert I des Integrals mit Hilfe der Trapez- und der Simpsonregel.

(b) Schätzen Sie den entstandenen Fehler mittels der entsprechenden Fehlerformel ab.

(c) Gegeben sei die folgende Quadraturvorschrift
$$\int_{-1}^{1} x^2 g(x) \mathrm{d}x \approx a_{-1} g(-1) + a_0 g(0) + a_1 g(1) =: Q(g).$$
Bestimmen Sie die Gewichte a_{-1}, a_0 und a_1 so, dass die obige Quadraturformel exakt ist für alle Polynome bis einschließlich zum Grad zwei.

(d) Was ist der maximale Grad bis zu dem die obige Quadraturformel Q exakt ist? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 ((3 + 7) + 10 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:
$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + y(x), \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3\mathrm{e}^x - x^2 - 2x - 2$ das obige Anfangswertproblem löst.

(ii) Approximieren Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{5}$ den Funktionswert $y\left(\frac{3}{5}\right)$. Was ist der tatsächliche Wert?

(b) Berechnen Sie eine Näherung für $u(0)$ der Lösung u mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = -1 + \frac{i}{2}$ für $i = 0, \ldots, 4$ für das folgende Randwertproblem
$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= \frac{1}{1 + x^2}, \\ u(-1) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Viel Erfolg!

Hinweise: Ergebnisse dieser Modulprüfung werden spätestens am Montag, den 20.04.2020 im Mathematik Gebäude (20.30) im zweiten Stock veröffentlicht.
Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den 23.04.2020 von 16.00 Uhr bis 18.00 Uhr im Hörsaal der Neuen Chemie (Gebäude 30.46) statt.
Genaueres wird sich online auf der Homepage der Vorlesung finden.