28.02.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Modulprüfung - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (9 + 9 + 2 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$\text{die Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & \frac{5}{2} \\ 3 & 27 & 6 \\ 2 & 22 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} \frac{61}{2} \\ 75 \\ 61 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A und geben Sie die dazugehörige Permutationsmatrix P mit $PA = LR$ an.

(b) Lösen Sie mithilfe der in (a) bestimmten Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(c) Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Wir führen den Algorithmus der LR-Zerlegung Schritt für Schritt durch:

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 11 & \frac{5}{2} \\ 3 & 27 & 6 \\ 2 & 22 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{(II)} \\ \text{(I)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 \\ 1 & 11 & \frac{5}{2} \\ 2 & 22 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \cdot(-\frac{2}{3}) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{(II)} \\ \text{(I)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(I)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 \\ \frac{2}{3} & 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(I)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 \\ \frac{2}{3} & 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir nun die beiden Dreiecksmatrizen L und R ab, sowie aus den römischen Ziffern die Permutationsmatrix P:

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R := \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

So gilt:

$$PA = LR.$$

(b) Wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$ lösen.
Schritt 1. Umformen: Es gilt nach dem Aufgabenteil (a) für $x \in \mathbb{R}^3$:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; \widetilde{b} := Pb = PAx = L\underbrace{Rx}_{=:y} = Ly,$$

da Permutationsmatrizen stets regulär/ invertierbar sind. Weiter ist

$$\widetilde{b} = Pb = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{61}{2} \\ 75 \\ 61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 61 \\ \frac{61}{2} \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. Vorwärtseinsetzen: Lösen wir erstmal $Ly = \widetilde{b}$ für $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} 75 \\ 61 \\ \frac{61}{2} \end{pmatrix} = \widetilde{b} \stackrel{!}{=} Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{2}{3}y_1 + y_2 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 75,\\
y_2 &= 61 - \frac{2}{3}y_1 = 61 - 50 = 11,\\
y_3 &= \frac{61}{2} - \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{2}y_2 = \frac{61}{2} - 25 - \frac{11}{2} = \frac{61-50-11}{2} = \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$y = \begin{pmatrix} 75\\ 11\\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die (eindeutige) Lösung von dem Gleichungssystem $Ly = \widetilde{b}$.
Schritt 2. Rücksubstitution: Lösen wir nun $Rx = y$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} 75\\ 11\\ 0 \end{pmatrix} = y \stackrel{!}{=} Rx = \begin{pmatrix} 3 & 27 & 6\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 27x_2 + 6x_3\\ 4x_2 + x_3\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= t,\\
4x_2(t) + x_3(t) = 11 \;\Leftrightarrow\; 4x_2(t) &= 11 - x_3(t) = 11 - t \;\Leftrightarrow\; x_2(t) = \frac{11-t}{4},\\
3x_1(t) + 27x_2(t) + 6x_3(t) = 75 \;\Leftrightarrow\; 3x_1(t) &= 75 - 27x_2(t) - 6x_3(t) = 75 - \frac{27\,(11-t)}{4} - 6t\\
&= \frac{300 - 297 + 27t - 24t}{4} = \frac{3+3t}{4} = \frac{3}{4}(1+t)\\
\Leftrightarrow\; x_1(t) &= \frac{1+t}{4}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Lösungsvektor(en) $x(t)$ aufstellen: Die Lösung vom Gleichungssystem $PAx = Pb = \widetilde{b}$ lautet

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{4}\\ \frac{11-t}{4}\\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+t\\ 11-t\\ 4t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit löst für alle $t \in \mathbb{R}$ der Vektor $x(t)$ auch das Gleichungssystem $Ax(t) = b$.
(c) Die Matrix A ist singulär, d.h. sie ist nicht-invertierbar, denn die Determinante der Matrix A ist gleich null, wie wir mit Hilfe vom Aufgabenteil (a) erhalten durch:

$$\begin{aligned}
|\det(A)| &= |\det(P)\det(A)| = |\det(PA)| = |\det(LR)| = |\det(L)\det(R)|\\
&= \left|\left(\prod_{i=1}^{3} l_{ii}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{3} r_{ii}\right)\right| = \left|\left(\prod_{i=1}^{3} 1\right) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 0)\right| = |1 \cdot 0| = |0| = 0\\
\Leftrightarrow\; \det(A) &= 0,
\end{aligned}$$

da die Determinantenfunktion multiplikativ ist und die Determinante einer Permutationsmatrix (in diesem Falle die der Matrix P) stets betragsmäßig eins ist. □

Aufgabe 2 (6 + 9 + 5 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ für } \varepsilon > 0,\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Für Matrizen $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definieren wir die Matrix-Norm: $\|M\|_{\mathrm{F}} = \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |m_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix-Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ verträglich mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ eine Matrix-Norm ist. Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle x, y\rangle_2| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Kondition $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_{\mathrm{F}}}(A)$.

(c) Wie muss $\varepsilon > 0$ gewählt werden, damit ein relativer Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm des gestörten Problems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

kleiner als 10^{-5} gewährleistet werden kann?

Lösung von Aufgabe 2

(a) Sei

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine beliebige reelle (2×2)-Matrix. Wir setzen die beiden Vektoren

$$m_{1*} := \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ und } m_{2*} := \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so haben wir

$$M = \begin{pmatrix} m_{1*}^T \\ m_{2*}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Damit folgt nun nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|Mx\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{2} |(Mx)_i|^2 = \sum_{i=1}^{2} \left| \sum_{j=1}^{2} m_{ij} x_j \right|^2 = \sum_{i=1}^{2} |\langle m_{i*}, x\rangle_2|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{2} \|m_{i*}\|_2^2 \|x\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^{2} \|m_{i*}\|_2^2 \right) \|x\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |m_{ij}|^2 \right) \|x\|_2^2 = \|M\|_{\mathrm{F}}^2 \|x\|_2^2 \\
\Leftrightarrow\ \|Mx\|_2 &\leq \|M\|_{\mathrm{F}} \|x\|_2
\end{aligned}$$

für alle $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, da die beiden Abbildungen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ als Normen insbesondere nicht-negativ sind. Die Matrix M war beliebig gewählt, und daher ist die Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ verträglich mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. (b) Die Kondition einer regulären Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzgl. der Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ ist definiert durch

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_{\mathrm{F}}}(M) = \|M\|_{\mathrm{F}} \left\|M^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}.$$

Für die Determinante der Matrix A gilt:

$$\det(A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1 \neq 0,$$

d.h. die Matrix ist invertierbar/ regulär und die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix A lautet nach der Cramerschen Regel:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt für die Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ der beiden Matrizen A und A^{-1}:

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{|2|^2 + |3|^2 + |1|^2 + |2|^2} = \sqrt{4 + 9 + 1 + 4} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \\
\|A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{|2|^2 + |-3|^2 + |-1|^2 + |2|^2} = \sqrt{4 + 9 + 1 + 4} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \|A\|_{\mathrm{F}}.
\end{aligned}$$

Damit lautet nun die Kondition der Matrix A bzgl. der Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$:

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_{\mathrm{F}}}(A) = \|A\|_{\mathrm{F}} \left\|A^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{18}\sqrt{18} = 18 > 1.$$

(c) Die benötigte Fehlerabschätzung aus der Vorlesung lautet:

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|I_2\|_{\mathrm{F}} \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_{\mathrm{F}}}(A)}{1 - \|A^{-1}\|_{\mathrm{F}} \|\Delta A\|_{\mathrm{F}}} \left(\frac{\|\Delta A\|_{\mathrm{F}}}{\|A\|_{\mathrm{F}}} + \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \right),$$

falls die Abschätzung $\left\|A^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \|\Delta A\|_{\mathrm{F}} < 1$ erfüllt ist, wobei I_2 die Einheitsmatrix im Raum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ beschreibt. Aus der Aufgabenstellung erhalten wir zuerst $\Delta b = 0 \in \mathbb{R}^2$ und weiter

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |1|^2} = \sqrt{1+0+0+1} = \sqrt{2}, \\
\|\Delta A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{|0|^2 + |\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 + |0|^2} = \sqrt{0+\varepsilon^2+\varepsilon^2+0} = \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\sqrt{\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon, \text{da } \varepsilon > 0 \text{ ist}, \\
\|b\|_2 &= \sqrt{|1|^2 + |1|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ und } \|\Delta b\|_2 = \sqrt{|0|^2 + |0|^2} = \sqrt{0+0} = \sqrt{0} = 0.
\end{aligned}$$

Um die obige Fehlerabschätzung zu benutze muss für $\varepsilon > 0$ gelten:

$$6\varepsilon = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\varepsilon = \left\|A^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \|\Delta A\|_{\mathrm{F}} < 1 \Leftrightarrow \varepsilon \qquad < \frac{1}{6},$$

d.h. wir müssen zuerst $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$ wählen. Aus der obigen Fehlerabschätzung folgt nun

$$\begin{aligned}
& \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} < 10^{-5} \\
\Leftarrow \quad & \frac{\|I_2\|_{\mathrm{F}} \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_{\mathrm{F}}}(A)}{1 - \|A^{-1}\|_{\mathrm{F}} \|\Delta A\|_{\mathrm{F}}} \left(\frac{\|\Delta A\|_{\mathrm{F}}}{\|A\|_{\mathrm{F}}} + \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \right) < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{2}\cdot 18}{1-6\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{3\sqrt{2}} + \frac{0}{\sqrt{2}} \right) < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{18\sqrt{2}}{1-6\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{3} + 0 \right) < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{18\sqrt{2}}{1-6\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{3} < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{6\sqrt{2}\varepsilon}{1-6\varepsilon} < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & 6\sqrt{2}\varepsilon < (1-6\varepsilon)\, 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & 6\sqrt{2}\varepsilon < 10^{-5} - 6\cdot 10^{-5}\varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & 6\sqrt{2}\varepsilon + 6\cdot 10^{-5}\varepsilon < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & 6\left(\sqrt{2} + 10^{-5}\right)\varepsilon < 10^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon < \frac{10^{-5}}{6\left(\sqrt{2}+10^{-5}\right)}
\end{aligned}$$

und es ist

$$\frac{10^{-5}}{6\left(\sqrt{2}+10^{-5}\right)} < \frac{10^{-5}}{6\sqrt{2}} = \frac{10^{-5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} < 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Demnach müssen wir $\varepsilon \in \left(0, \frac{10^{-5}}{6\left(\sqrt{2}+10^{-5}\right)}\right)$ wählen um einen relativen Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm des gestörten Problems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b = b$$

zu gewährleisten. $\square$

Bemerkung: Die angegebene Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ heißt auch Frobeniusnorm und diese wird nicht von einer Vektornorm induziert, wie wir aus Aufgabenteil (c) sehen können, da die Frobeniusnorm der Einheitsmatrix ungleich Eins ist:

$$\|I_2\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Aufgabe 3 (10 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben seien die folgenden zwei Optimierungsprobleme

(1) Maximiere $Z_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3$

$$\text{unter} \begin{cases} x_1 - x_3 & \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

(2) Minimiere $Z_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$

$$\text{unter} \begin{cases} 2x_1 - x_2 & \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 & \leq 5, \\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

(a) Bringen Sie das Optimierungsproblem (1) auf Normalform und lösen Sie es mithilfe des Simplex-Algorithmus.

(b) Bringen Sie das Optimierungsproblem (2) auf Normalform und lösen Sie es mithilfe des Simplex-Algorithmus.

Lösung von Aufgabe 3

(a) Das Optimierungsproblem (1) lautet:

$$\text{Maximiere } Z_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(*) \begin{cases} (I)\ \ x_1 - x_3 \leq 1, \\ (II)\ \ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3, \\ (III)\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Schritt 1. In Standard- und Normalform bringen: Setze dazu:

$$\widetilde{Z}_1(x_1, x_2) := Z_1(x_1, x_2) + 3 = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3 + 3 = -x_1 + x_2 + 3x_3.$$

Nun lautet unser neues Optimierungsproblem, deren Nebenbedingungen äquivalent zu $(*)$ sind, in Standard- bzw. Normalenform:

$$\text{Maximiere } \widetilde{Z}_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(**) \begin{cases} (I)\ \ x_1 - x_3 \leq 1, \\ (II)\ \ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3, \\ (III)\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Schritt 2. Das Simplex-Tableau aufstellen: Dazu führen wir die Schlupfvariablen y_1 und y_2 ein mit

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + y_1 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + y_2 = 3, \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Setze nun $n = 2$, $m = 2$ und

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \widetilde{c}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das (Anfangs-)Simplex-Tableau lautet nun

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_1
y_1	1	0	-1	1	0	1
y_2	1	-2	1	0	1	3
$-\widetilde{c}_1$	1	-1	-3	0	0	0

Schritt 3. Durchführung des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
y_1	1	0	-1	1	0	1	
y_2	1	-2	1	0	1	3	$\longleftarrow$ Pivotzeile
$-\widetilde{c}$	1	-1	-3	0	0	0	

Pivotspalte (-3 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -3 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die erste Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 1 in der zweiten Zeile der einzige positive Eintrag war. Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
y_1	1	0	-1	1	0	1	$+$
y_2	1	-2	1	0	1	3	$\cdot 1$
$-\widetilde{c}$	1	-1	-3	0	0	0	$\cdot 3$ $+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	x_1	x_2		$x_3 y_1$	y_2	$\cdot$
y_1	2	-1	0	1	1	4
x_1	1	-2	1	0	1	3
$\cdot$	4	-7	0	0	3	9

Pivotspalte (-7 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -7 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, allerdings ist eine Pivotzeile nicht wählbar, da alle Einträge in der Pivotspalte nicht-positiv waren. Damit bricht der Simplex-Algorithmus an dieser Stelle ab und wir erhalten aus der Vorlesung, dass das Optimierungsproblem unter diesen Nebenbedingungen unbeschränkt ist.

Bemerkung: Dies erhalten wir auch durch genaues Hinsehen, denn wenn wir

$$x_1 = 0, \;\; x_2(t) = t + 3 \text{ für } t \geq 0 \text{ und } x_3 = 0$$

wählen, so gelten die Nebenbedingungen $(*)$ für alle $t \geq 0$, denn es ist:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 - 0 = 0 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2(t) + x_3 &= 0 - 2\,(t+3) + 0 = -2t - 6 \leq 0 \leq 3, \\ x_1 &= 0 \geq 0, \;\; x_2(t) = t + 3 \geq 0 + 3 = 3 \geq 0, \;\; x_3 = 0 \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Aber für die Zielfunktion Z_1 gilt nun:

$$Z_1\,(x_1, x_2(t), x_3) = Z_1\,(0, t+3, 0) = -0 + (t+3) + 3 \cdot 0 - 3 = 0 + t + 3 + 0 - 3 = t$$

für alle $t \geq 0$. Dies liefert nun für $t \to \infty$:

$$Z_1\,(x_1, x_2(t), x_3) = t \to \infty \text{ für } t \to \infty,$$

womit die Zielfunktion Z_1 unter den Nebenbedingungen $(*)$ unbeschränkt ist.

(b) Das Optimierungsproblem (2) lautet:

$$\text{Minimiere } Z_2\,(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.)} :(*) \begin{cases} (I) \;\; 2x_1 - x_2 & \geq 2, \\ (II) \;\; -x_1 + 2x_2 & \leq 5, \\ (III) \;\; x_1 \geq 2 & \text{und } x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Schritt 1. In Standard- und Normalform bringen: Wir erhalten durch Umformen und Setzen anschließend:

$$\begin{aligned} (III) &\Rightarrow \;\; \widetilde{x}_1 := x_1 - 2 \geq 0 \;\; (\text{d.h. } x_1 = \widetilde{x}_1 + 2)\,, \\ (III) &\Rightarrow \;\; \widetilde{x}_2 := x_2 - 1 \geq 0 \;\; (\text{d.h. } x_2 = \widetilde{x}_2 + 1)\,, \\ (II) &\Rightarrow \;\; 5 \geq -x_1 + 2x_2 = -\,(\widetilde{x}_1 + 2) + 2\,(\widetilde{x}_2 + 1) = -\widetilde{x}_1 - 2 + 2\widetilde{x}_2 + 2 = -\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ -\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2\leq 5,\\
(I)\ &\Rightarrow\ 2\leq 2x_1-x_2=2\left(\widetilde{x}_1+2\right)-\left(\widetilde{x}_2+1\right)=2\widetilde{x}_1+4-\widetilde{x}_2-1=2\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2+3\\
&\Leftrightarrow\ 2\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2\geq 2-3=-1\\
&\Leftrightarrow\ -2\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2=-\left(2\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2\right)\leq -(-1)=1.
\end{aligned}
$$

Damit folgt nun

$$
Z\left(x_1,x_2\right)=x_1-x_2=\left(\widetilde{x}_1+2\right)-\left(\widetilde{x}_2+1\right)=\widetilde{x}_1+2-\widetilde{x}_2-1=\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2+1.
$$

Setze nun:

$$
\widetilde{Z}\left(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2\right):=\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2.
$$

Nun lautet unser neues Optimierungsproblem, deren Nebenbedingungen äquivalent zu $(*)$ sind, in Standard- bzw. Normalenform:

$$
\text{Maximiere } \widetilde{Z}\left(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2\right)=\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2
$$

$$
\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(**)\begin{cases}\left(\widetilde{I}\right) & -2\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2 & \leq 1,\\ \left(\widetilde{II}\right) & -\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2 & \leq 5,\\ \left(\widetilde{III}\right) & \widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2 & \geq 0.\end{cases}
$$

Schritt 2. Das Simplex-Tableau aufstellen: Dazu führen wir die Schlupfvariablen y_1 und y_2 ein mit

$$
\begin{cases}-2\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2+y_1 & =1,\\ -\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2+y_2 & =5,\\ \widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,y_1,y_2 & \geq 0.\end{cases}
$$

Setze nun $n=2$, $m=2$ und

$$
\widetilde{b}_2:=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix},\ \widetilde{c}_2:=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.
$$

Das (Anfangs-)Simplex-Tableau lautet nun

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\widetilde{b}_2$
y_1	-2	1	1	0	1
y_2	-1	2	0	1	5
$-\widetilde{c}_2$	1	-1	0	0	0

Schritt 3. Durchführung des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\widetilde{b}_2$
y_1	-2	1	1	0	1
y_2	-1	2	0	1	5
$-\widetilde{c}_2$	1	-1	0	0	0

$\longleftarrow$ Pivotzeile

Pivotspalte (-1 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -1 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die erste Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 1 in der zweiten Zeile der war mit:

$$
\frac{1}{1}=1<\frac{5}{2}.
$$

Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist).

Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\widetilde{b}_2$	
y_1	-2	1	1	0	1	$\cdot(-2)$; $\cdot 1$
y_2	-1	2	0	1	5	$+$
$-\widetilde{c}_2$	1	-1	0	0	0	$+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$	
$\widetilde{x}_2$	-2	1	1	0	1	
$\widetilde{x}_1$	3	0	-2	1	3	$\longleftarrow$ Pivotzeile
$\cdot$	-1	0	1	0	1	

Pivotspalte (-1 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -1 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die dritte Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 3 der einzige positive war. Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$	
$\widetilde{x}_2$	-2	1	1	0	1	$+$
y_2	3	0	-2	1	3	$\cdot\frac{1}{3}$; $\cdot 2$; $\cdot 1$
$\cdot$	-1	0	1	0	1	$+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y_1	y_2	$\cdot$
$\widetilde{x}_2$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
$\widetilde{x}_1$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\cdot$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Der Simplex-Algorithmus bricht nun an dieser Stelle ab, da keine Pivotspalte mehr wählbar ist, d.h. dass das Maximum von $\widetilde{Z}$ im Punkt $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (1, 3)$ angenommen wird. Also nimmt die Funktion Z ihr Maximum bei

$$x_1 = \widetilde{x}_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ und } x_2 = \widetilde{x}_2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

an mit dem Maximum:

$$Z(x_1, x_2) = Z(3, 4) = 3 - 4 = -1.$$

Nun gilt:

$$\min_{(*)} Z_2(x_1, x_2) = \min_{(*)} -Z(x_1, x_2) = -\max_{(*)} Z(x_1, x_2) = -Z(3, 4) = -(-1) = 1.$$

Dies bedeutet, dass das Minimum der Zielfunktion Z_2 unter den geforderten Nebenbedingungen $(*)$ an der Stelle $(x_1, x_2) = (3, 4)$ angenommen und gleich 1 ist. $\square$

Aufgabe 4 (8 + 4 + 8 = 20 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - \cos(x)$$
und zeigen Sie, dass diese Funktion eine eindeutige positive Nullstelle x^* hat und diese sich im Intervall $I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ befindet.
Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

(b) Gegeben ist der Startwert $x^0 = \frac{\pi}{3}$. Begründen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahren in diesem Fall.

(c) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens durch. Was für eine Genauigkeit liegt vor? Berücksichtigen Sie, dass für die Nullstelle $x^* \approx 0.824132$ gilt. Auf wie viele Nachkommastellen ist das Newton-Verfahren nach drei Schritten mindestens genau? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 4

(a) Die Funktion f ist als Summe zweier unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ wieder unendlich oft stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \sin(x), \\ f''(x) &= 2 + \cos(x), \\ f'''(x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gilt für $x \in (0, \pi)$:

$$f'(x) = 2x + \sin(x) > 2 \cdot 0 + \sin(0) = 0 + 0 = 0$$

und für $x \in [\pi, \infty)$:

$$f'(x) = 2x + \sin(x) \geq 2\pi - 1 > 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0,$$

d.h. $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ und damit ist die Funktion f streng monoton wachsend auf dem Intervall $[0, \infty)$. Auf Grund dieser strengen Monotonie kann die Funktion f nur eine einzige Nullstelle auf dem Intervall $[0, \infty)$ besitzen. Weiter gilt für die Funktionswerte von f:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{36} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi^2 - 18\sqrt{3}}{2} < \frac{16 - 18}{36} = \frac{-2}{36} = -\frac{1}{18} < 0, \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} > \frac{9}{9} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Da die Funktion f insbesondere stetig ist, existiert somit nach dem Zwischenwert/ Nullstellensatz von Bolzano ein $x^* \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ mit $f(x^*) = 0$, d.h. x^* ist eine nicht-negative Nullstelle der Funktion f. Und wegen der oben genannten Eindeutigkeit ist diese Nullstelle x^* eindeutig auf dem Intervall $[0, \infty)$.
(b) Setze $x^{(0)} := \frac{\pi}{3}$ und $I := \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, so ist

$$|I| = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2-1}{6}\pi = \frac{\pi}{6} < 1.$$

Weiter haben wir

$$f''(x) = 2 + \cos(x) > 2 - 1 = 1 > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. die erste Ableitung f' der Funktion f ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und somit auch insbesondere auf dem Intervall I. Dies liefert uns laut Aufgabenteil (a) die Abschätzung für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= f'(x) \geq f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2\pi + 3}{6} =: \alpha, \\ |f''(x)| &= f''(x) = 2 + \cos(x) \leq 2 + 1 = 3 =: \beta \end{aligned}$$

und $\alpha, \beta > 0$. Für den Wachstumsquotienten berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{\beta} &= \frac{2 \cdot \frac{2\pi+3}{6}}{3} = \frac{\frac{2\pi+3}{3}}{3} = \frac{2\pi + 3}{9} > \frac{2 \cdot 3 + 3}{9} = \frac{6+3}{9} = \frac{9}{9} = 1, \\ \frac{\beta}{2\alpha} &= \frac{9}{2\pi + 3} < 1. \end{aligned}$$

Weiter gilt insbesondere

$$\left|x^* - x^{(0)}\right| = \left|x^* - \frac{\pi}{3}\right| < \frac{\pi}{6} < 1 < \frac{2\alpha}{\beta}.$$

Also konvergiert das Newton-Verfahren.

Bemerkung: Tatsächlich gilt hier auch $x^{(k)} \in I$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, durch die Vorschrift vom Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} \text{ und } x^{(0)} = \frac{\pi}{3}$$

gegeben ist. *Induktionsanfang (I.A.)*: $k = 0$
Es gilt:

$$x^{(0)} = \frac{\pi}{3} > x^* \text{ und } x^{(0)} = \frac{\pi}{3} \in I.$$

Induktionsvorausetzung (I.V.): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses k gelte

$$x^{(k)} \in I \text{ und } x^{(k)} > x^*.$$

Induktionsschluss (I.S.): Dann haben wir für $x^{(k+1)}$ nach der Vorschrift von dem Newton-Algorithmus:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} < x^{(k)} - 0 = x^{(k)} \leq \max I = \frac{\pi}{3},$$

da nach der Induktionsvoraussetzung $x^{(k)} > x^*$ und $x^{(k)} \in I$ ist und demnach gilt $f\left(x^{(k)}\right) > 0$ und $f'\left(x^{(k)}\right) > 0$. Weiter existiert wegen $x^{(k)} > x^*$ nach der Induktionsvoraussetzung laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung eine Zwischenstelle $\eta^{(k)} \in \left(x^*, x^{(k)}\right)$ mit

$$f\left(x^{(k)}\right) = f\left(x^{(k)}\right) - 0 = f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(0)}\right) = f'\left(\eta^{(k)}\right)\left(x^{(k)} - x^*\right).$$

Aus der Vorschrift für den Newton-Algorithmus haben wir nun

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} = x^{(k)} - \frac{f'\left(\eta^{(k)}\right)\left(x^{(k)} - x^*\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} \\
&> x^{(k)} - \frac{f'\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}\left(x^{(k)} - x^*\right) = x^{(k)} - 1 \cdot \left(x^{(k)} - x^*\right) = x^{(k)} - \left(x^{(k)} - x^*\right) \\
&= x^{(k)} - x^{(k)} + x^* = x^*,
\end{aligned}$$

da die Funktion f' streng monoton wachsend ist auf $\mathbb{R}$ und $x^{(k)} > x^*$ laut Induktionsvoraussetzung. Wegen $x^* \in I$ und $\subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist haben wir nun $x^{(k+1)} \in I$.

(c) Nach der Vorschrift für den Newton-Algorithmus haben wir für $x^{(0)} = \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
f\left(x^{(0)}\right) &= f\left(\frac{pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} = \frac{2\pi^2 - 9}{18}, \\
f'\left(x^{(0)}\right) &= f'\left(\frac{pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6}, \\
x^{(1)} &= x^{(0+1)} = x^{(0)} - \frac{f\left(x^{(0)}\right)}{f'\left(x^{(0)}\right)} = \frac{\pi}{3} - \frac{\frac{2\pi^2 - 9}{18}}{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6}} \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi^2 - 9}{18} \cdot \frac{6}{4\pi + 3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi^2 - 9}{3\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right)} = \frac{\pi\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right) - \left(2\pi^2 - 9\right)}{3\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{4\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 2\pi^2 + 9}{3\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right)} = \frac{2\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi + 9}{3\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right)}.
\end{aligned}$$

Also ist laut dem Taschenrechner

$$x^{(1)} = \frac{2\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi + 9}{3\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right)} \approx 0.845664,$$

d.h. nach einem Schritt sind wir bis auf eine Nachkommastelle exakt, bzw.

$$\left|x^{(1)} - x^*\right| < 10^{-1}.$$

Nach der Abschätzung vom Newton-Algorithmus erhalten wir somit

$$\left|x^{(3)} - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^{(2)} - x^*\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\left|x^{(1)}-x^*\right|^2\right)^2 \\
&= \frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\left|x^{(1)}-x^*\right|^4 \\
&< \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^3\cdot\left(10^{-1}\right)^4 = \left(\frac{9}{2\pi+3}\right)^3\cdot 10^{-4} = \frac{729}{8\pi^3+36\pi^2+54\pi+27}\cdot 10^{-4}
\end{aligned}
$$

$$
\approx 0.911248\cdot 10^{-4} < 10^{-4},
$$

damit liegt nach drei Schritten eine Genauigkeit bis auf mindestens vier Nachkommastellen vor. □

Aufgabe 5 (4 + 4 + 9 + 3 = 20 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals I. Approximieren Sie den Wert I des Integrals mit Hilfe der Trapez- und der Simpsonregel.

(b) Schätzen Sie den entstandenen Fehler mittels der entsprechenden Fehlerformel ab.

(c) Gegeben sei die folgende Quadraturvorschrift

$$\int_{-1}^{1} x^2 g(x)\mathrm{d}x \approx a_{-1} g(-1) + a_0 g(0) + a_1 g(1) =: Q(g).$$

Bestimmen Sie die Gewichte a_{-1}, a_0 und a_1 so, dass die obige Quadraturformel exakt ist für alle Polynome bis einschließlich zum Grad zwei.

(d) Was ist der maximale Grad bis zu dem die obige Quadraturformel Q exakt ist? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 5

(a) wir setzen die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

und die Punkte $a = 1$ und $b = 2$. Dann ist

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\log(x)]_1^2 = \log(2) - \log(1) = \log(2) - 0 = \log(2).$$

Weiter haben wir die Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(a) &= f(1) = \frac{1}{1} = 1, \\ f(b) &= f(2) = \frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1+2}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die beiden gesuchten Approximationen:
Trapezregel:

$$I \approx (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} = (2-1)\,\frac{1+\frac{1}{2}}{2} = 1 \cdot \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Simpsonregel:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{2-1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{6+16+3}{6} = \frac{25}{36} \approx 0.694444. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist als gebrochenrationale Funktion unendlich oft stetig-differenzierbar auf dem Intervall $(0,\infty)$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3}, \\ f'''(x) &= -\frac{6}{x^4}, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24}{x^5} \end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Damit ist

$$\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = \frac{2}{1} = 2,$$
$$\max_{x\in[1,2]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{24}{x^5}\right| = \frac{24}{1} = 24.$$

Fehler bei Trapez-Formel:

$$|R(f)| \leq \frac{(2-1)^3}{12} \max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = \frac{1^3}{12} \cdot 2 = \frac{1}{6}.$$

Fehler bei Simpson-Formel:

$$|R(f)| \leq \frac{(2-1)^5}{2880} \max_{x\in[1,2]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{1^5}{2880} \cdot 24 = \frac{1}{120}.$$

(c) Wir setzen

$$Q(g) := a_{-1}g(-1) + a_0 g(0) + a_1 g(1)$$

für alle stetigen Funktionen $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Es soll gelten:

$$\int_{-1}^{1} x^2 p(x) \mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p) \text{ für alle Polynome } p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit Grad kleiner gleich 2.}$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und der Funktion Q genügt es für uns die jeweiligen Monome p_0, p_1 und p_2 zu überprüfen. Wir erhalten somit aus der obigen Forderung:

$$\begin{aligned}
p_0(x) = 1: \quad & \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 p_0(x) \mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p_0) \\
& = a_{-1}p_0(-1) + a_0 p_0(0) + p_0(1) = a_{-1} \cdot 1 + a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = a_{-1} + a_0 + a_1, \\
p_1(x) = x: \quad & 0 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 p_1(x) \mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p_1) \\
& = a_{-1}p_1(-1) + a_0 p_1(0) + a_1 p_1(1) = a_{-1} \cdot (-1) + a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 = -a_{-1} + 0 + a_1 = -a_{-1} + a_1, \\
p_2(x) = x^2: \quad & \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right] = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 p_2(x) \mathrm{d}x \overset{!}{=} Q(p_2) \\
& = a_{-1}p_2(-1) + a_0 p_2(0) + a_1 p_2(1) = a_{-1} \cdot (-1)^2 + a_0 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 1^2 = a_{-1} \cdot 1 + a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 \\
& = a_{-1} + 0 + a_1 = a_{-1} + a_1.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir direkt durch Äquivalenzumformung

$$0 = -a_{-1} + a_1 \iff a_{-1} = a_1.$$

Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{5} = a_{-1} + a_1 = a_1 + a_1 = 2a_1 \\
\iff & a_1 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Und damit auch

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{5}.$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung bekommen wir nun

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} = a_{-1} + a_0 + a_1 = \frac{1}{5} + a_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + a_0 \\
\iff & a_0 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

Nun lautet die gesuchte Quadraturformel Q:

$$Q(g) = a_{-1}g(-1) + a_0 g(0) + a_1 g_1(1) = \frac{1}{5}g(-1) + \frac{4}{15}g(0) + \frac{1}{5}g(1) = \frac{1}{15}\left(3g(-1) + 4g(0) + 3g(1)\right)$$

für alle stetigen Funktionen $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$.
(d) Aufgrund der Linearität des Integrals und der Funktion Q genügt es für uns die beiden jeweiligen Monome p_3 und p_4 zu überprüfen. Es gilt für das Monom p_3:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2 p_3(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^5 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0, \\
\text{und } Q\left(p_3\right) &= \frac{1}{5}p_3(-1) + \frac{4}{15}p_3(0) + \frac{1}{5}p_3(1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^3 + \frac{4}{15} \cdot 0^3 + \frac{1}{5} \cdot 1^3 \\
&= \frac{1}{5} \cdot (-1) + \frac{4}{15} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 1 = -\frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{5} = 0 \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 p_3(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Allerdings gilt für das Monom p_4:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2 p_4(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^r \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^6 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}, \\
\text{und } Q\left(p_4\right) &= \frac{1}{5}p_4(-1) + \frac{4}{15}p_4(0) + \frac{1}{5}p_4(1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 + \frac{4}{15} \cdot 0^4 + \frac{1}{5} \cdot 1^4 \\
&= \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{4}{15} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \\
&\neq \int_{-1}^{1} x^2 p_4(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass die Quadraturformel Q exakt ist für alle Polynome bis einschließlich zum Grad drei, ab Grad vier muss dies in der Regel nicht mehr gewährleistet, da die Quadraturformel für das Monom p_4 schon nicht exakt ist. $\square$

Aufgabe 6 ((3 + 7) + 10 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + y(x), \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3\mathrm{e}^x - x^2 - 2x - 2$ das obige Anfangswertproblem löst.

(ii) Approximieren Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{5}$ den Funktionswert $y\left(\frac{3}{5}\right)$. Was ist der tatsächliche Wert?

(b) Berechnen Sie eine Näherung für $u(0)$ der Lösung u mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = -1 + \frac{i}{2}$ für $i = 0, \ldots, 4$ für das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ u(-1) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 6

(a) (i) Die Funktion y ist als Summe stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ wieder stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und somit insbesondere auf $[0,\infty)$, d.h. $f \in C^1\left((0,\infty)\right) \cap C^0\left([0,\infty)\right)$. Weiter gilt für die Ableitung der Funktion y:

$$y'(x) = 3\mathrm{e}^x - 2x - 2 = x^2 + 3\mathrm{e}^x - x^2 - 2x - 2 = x^2 + y(x)$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Zudem ist noch für $x_0 = 0$:

$$y(0) = 3\mathrm{e}^0 - 0^2 - 2 \cdot 0 - 2 = 3 \cdot 1 - 0 - 0 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Damit löst die Funktion y das vorgegebene Anfangswertproblem.
(ii) Setze

$$x_0 := 0,\ y_0 := 1,\ h = \frac{1}{5} > 0,$$

sowie die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y.$$

Für das Euler-Verfahren haben wir $\beta = 0$ und daher die folgende Diskretisierungsfunktion

$$\Phi_0\left(x,y,h\right) = f(x,y) \text{ für } x \in [0,\infty), y \in \mathbb{R}.$$

Weiter sind die Stützstellen gegeben durch

$$x_n = x_0 + nh = 0 + \frac{n}{5} = \frac{n}{5} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und die Approximationen darin durch

$$y_n = y_{n-1} + h\Phi_0\left(x_{n-1}, y_{n-1}, h\right) = y_{n-1} + \frac{1}{5} f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gesucht: $y_5 \approx y(1)$.
Nach dem Euler-Verfahren haben wir also:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,\ y_0 = 1: \\ f\left(x_0,y_0\right) &= f(0,1) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1, \\ x_1 &= \frac{1}{5},\ y_1 = y_{1-1} + \frac{1}{5} f\left(x_{1-1}, y_{1-1}\right) = y_0 + \frac{1}{5} f\left(x_0,y_0\right) = y_0 + \frac{1}{5} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}: \\ f\left(x_1,y_1\right) &= f\left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} = \frac{31}{25}, \\ x_2 &= \frac{2}{5},\ y_2 = y_{2-1} + \frac{1}{5} f\left(x_{2-1}, y_{2-1}\right) = y_1 + \frac{1}{5} f\left(x_1,y_1\right) = y_1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{31}{25} = \frac{6}{5} + \frac{31}{125} = \frac{181}{125}: \\ f\left(x_2,y_2\right) &= f\left(\frac{2}{5}, \frac{181}{125}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{181}{125} = \frac{4}{25} + \frac{181}{125} = \frac{201}{125}, \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{3}{5},\ y_3 = y_{3-1} + \frac{1}{5} f\left(x_{3-1}, y_{3-1}\right) = y_2 + \frac{1}{5} f\left(x_2, y_2\right) = y_2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{201}{125} = \frac{181}{125} + \frac{201}{625} = \frac{1106}{625}:$$

$$f\left(x_3, y_3\right) = f\left(\frac{3}{5}, \frac{1106}{625}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1106}{625} = \frac{9}{25} + \frac{1106}{625} = \frac{1331}{625},$$

Also ist

$$y\left(\frac{3}{5}\right) \approx y_3 = \frac{1106}{625} = 1.7696.$$

Der exakte Wert von $y\left(\frac{3}{5}\right)$ lautet nach Aufgabenteil (i):

$$y\left(\frac{3}{5}\right) = 3e^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{5} - 2 = 3e^{\frac{3}{5}} - \frac{9}{25} - \frac{6}{5} - 2 = 3e^{\frac{3}{5}} - \frac{9+30+50}{25} = 3e^{\frac{3}{5}} - \frac{89}{25} \approx 1.906356.$$

□

(b) Wir setzen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

und die Randwerte

$$y_0 := y\left(x_0\right) = y(-1) = 0,\ y_4 = y\left(x_4\right) = y(1) = 0.$$

Wegen $x_i = -1 + \frac{i}{2}$ für $i = 0, \ldots, 4$ haben wir $N = 3$ und daher die Schrittweite

$$h = \frac{x_{N+1} - x_0}{N+1} = \frac{x_{3+1} - x_0}{3+1} = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0.$$

Für eine Restfunktion r gilt laut Vorlesung:

$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + r(h) \text{ für alle } x,$$

wir setzen daher

$$\begin{aligned} y\left(x_i\right) &\approx \frac{y\left(x_{i-1}\right) - 2y\left(x_i\right) + y\left(x_{i+1}\right)}{h^2} \\ &\approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\frac{1}{4}} = 4\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$. Also folgt nun aus der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -y''\left(x_i\right) + y\left(x_i\right) &= \frac{1}{1+x_i^2} \\ \to\ -4\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) + y_i &= \frac{1}{1+x_i^2} \\ \Leftrightarrow\ -4y_{i-1} + 8y_i - 4y_{i+1} + y_i &= \frac{1}{1+x_i^2} \\ \Leftrightarrow\ -4y_{i-1} + 9y_i - 4y_{i+1} &= \frac{1}{1+x_i^2} \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$. So erhalten wir die drei Gleichungen: *Fall 1.*: $i = 1$
Hier ist $x_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ und daher ist

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} &= \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+x_1^2} \\ &= -4y_{1-1} + 9y_1 - 4y_{1+1} = -4y_0 + 9y_1 - 4y_2 = -4 \cdot 0 + 9y_1 - 4y_2 = 0 + 9y_1 - 4y_2 \\ &= 9y_1 - 4y_2. \end{aligned}$$

Fall 2.: $i = 2$
Hier ist $x_2 = -1 + \frac{2}{2} = -1 + 1 = 0$ und daher ist

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{1+x_2^2} \\ &= -4y_{2-1} + 9y_2 - 4y_{2+1} = -4y_1 + 9y_2 - 4y_3. \end{aligned}$$

Fall 3.: $i = 3$
Hier ist $x_1 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ und daher ist

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} &= \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+x_3^2} \\ &= -4y_{3-1} + 9y_3 - 4y_{3+1} = -4y_2 + 9y_3 - 4y_4 = -4y_2 + 9y_3 - 4 \cdot 0 = -4y_2 + 9y_3 - 0 \\ &= -4y_2 + 9y_3.\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -4 & 0 & \frac{4}{5} \\ -4 & 9 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 9 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{4}{9} \\ + \end{array} \;\Big|\cdot \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{45} \\ 0 & \frac{65}{9} & -4 & \frac{29}{45} \\ 0 & -4 & 9 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{65}{36} \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \end{array} \;\Big|\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{49}{4} & \frac{94}{45} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{9}{49} \\ + \end{array} \;\Big|\cdot \frac{4}{49} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{376}{2205} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{46}{245} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{46}{245} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{376}{2205} \end{array}\right).$$

Also haben wir

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = \frac{46}{245},\ y_3 = \frac{376}{2205} \text{ und } y_4 = 0.$$

Also ist

$$y(0) = y\left(x_2\right) \approx y_2 = \frac{46}{245}.$$

□