Formelsammlung für die Klausur Numerische Methoden

Algorithmus 1.20 (Cholesky-Verfahren)
Für $i = 1, \ldots, m$

1. Für $k = 1, \ldots, i-1$ berechne
$$l_{ik} := \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{\mu=1}^{k-1} l_{i\mu} \overline{l_{k\mu}} \right).$$

2. Berechne
$$l_{ii} := \sqrt{a_{ii} - \sum_{\mu=1}^{i-1} |l_{i\mu}|^2}.$$

Algorithmus 2.2 (Von-Mises Iteration)
Sei A eine diagonalisierbare $m \times m$-Matrix; wähle einen Startvektor $x^0 \in \mathbb{C}^m$.
Iteration: Für $k = 1, 2, \ldots$ bilde die Vektoren
$$z^k := Ax^{k-1} \text{ und } x^k := \frac{z^k}{\left(z^k\right)_{i_k}},$$
wobei der Index i_k so gewählt ist, dass
$$\left|\left(z^k\right)_{i_k}\right| = \max_{i=1,\ldots,m} \left|\left(z^k\right)_i\right|$$
gilt. (Hier bezeichnet $\left(z^k\right)_i$ die $i$te Komponente des Vektors z^k)
Resultat 2.3 (Konvergenz der von-Mises Iteration)
Ist λ_1 der eindeutige betragsmäßig größte Eigenwert von der Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit zugehörigem Eigenvektor $u^1 \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$, gilt:

1. $\lim\limits_{k \to \infty} \left(z^{k+1}\right)_{i_k} = \lambda_1$.
2. $\lim\limits_{k \to \infty} \left[x^k - \frac{u^1}{(u^1)_{i_k}}\right] = 0$.

Algorithmus 2.4 (Inverse Iteration von Wielandt)
Sei A eine diagonalisierbare reguläre $m \times m$-Matrix. Wähle einen Startvektor $y^0 \in \mathbb{C}^m$.
Iteration: Für $k = 1, 2, \ldots$ bilde die Vektoren
$$w^k := A^{-1}y^{k-1} \text{ und } y^k := \frac{w^k}{\left(w^k\right)_{i_k}},$$
wobei der Index i_k so gewählt ist, dass
$$\left|\left(w^k\right)_{i_k}\right| = \max_{i=1,\ldots,m} \left|\left(w^k\right)_i\right|$$
gilt.
Inverse einer 2×2 Matrix
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
Resultat 2.5 (Konvergenz der inversen Iteration)
Ist λ_m der eindeutige betragsmäßig kleinste Eigenwert von $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit zugehörigem Eigenvektor $u^m \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$, dann gilt:

1. $\lim\limits_{k \to \infty} \left(w^{k+1}\right)_{i_k} = \frac{1}{\lambda_m}$.
2. $\lim\limits_{k \to \infty} \left[y^k - \frac{u^m}{(u^m)_{i_k}}\right] = 0$.

Definition 3.2 und 3.4 (Standardmodell und Normalform)
Ein Standardmodell ist ein lineares Optimierungsproblem, bei dem das Maximum der Zielfunktion
$$z(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$
gesucht wird, wobei die m Nebenbedingungen
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i \text{ für } i = 1, \ldots, m,$$

sowie $x_k \geqslant 0$ für $k = 1, \dots, n$ erfüllt sein müssen. Gilt zusätzlich $b_i \geqslant 0$ für alle $i = 1, \dots, m$, so ist das Standardmodell in Normalform gegeben.

Resultat 4.9 (Abschätzung des relativen Fehlers von x)

Seien $\|\cdot\|$ eine Vektornorm in $\mathbb{C}^m$ und $N(\cdot)$ eine mit der Norm $\|\cdot\|$ verträgliche Matrixnorm (d.h. $\|Av\| \leqslant N(A)\|v\|$ für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und allen Vektoren $v \in \mathbb{C}^m$) mit der Eigenschaft $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Ist $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ eine invertierbare Matrix und gilt $N\left(A^{-1}\right) N(\Delta A) < 1$, so lässt sich der relative Fehler der Lösung des gestörten linearen Gleichungssystems $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$, wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leqslant \frac{N(I_m)\,\mathrm{cond}_{N(\cdot)}(A)}{1 - \mathrm{cond}_{N(\cdot)}(A)\frac{N(\Delta A)}{N(A)}} \left(\frac{N(\Delta A)}{N(A)} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \\
&= \frac{N(I_m)\,\mathrm{cond}_{N(\cdot)}(A)}{1 - N(A^{-1})\,N(\Delta A)} \left(\frac{N(\Delta A)}{N(A)} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)
\end{aligned}
$$

mit $\mathrm{cond}_{N(\cdot)}(A) = N(A)N\left(A^{-1}\right)$ und der Einheitsmatrix $I_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Satz 5.1 Konvergenz des Newtonschen Verfahrens

Sei $F\colon [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $F(x^*) = 0$. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $|F'(x)| \geqslant \alpha > 0$ und $|F''(x)| \leqslant \beta$ ist für alle $x \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$, so gilt:

$$
x^k \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2] \;\Rightarrow\; \left|x^* - x^{k+1}\right| \leqslant \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^* - x^k\right|^2,
$$

wobei x^k die Folge des Newtonschen Verfahrens zum Startwert x^0 ist. Falls zusätzlich $x^k \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, und $\left|x^* - x^0\right| < \frac{2\alpha}{\beta}$ gilt, so konvergiert $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen x^* für $k \to \infty$.

Bemerkung: Dieses Theorem gilt auch, wenn wir das Intervall $[x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$ überall durch $(x^* - \delta_1, x^* + \delta_2)$ ersetzen.

Satz 6.1 (Fehler der Trapezregel) Ist f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$, so gilt die Fehlerdarstellung der Trapezregel

$$
|R(f)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.
$$

Simpsonregel $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$ mit Fehler $|R(f)| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

Einschrittverfahren für

$$
\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{mit Schrittweite } h: \quad \begin{cases} x_n = x_0 + nh, \\ y_n = y_{n-1} + h\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h) \end{cases}
$$

hat den **lokalen Diskretisierungsfehler** $\Theta(x_0, y_0, h) := \Delta(x_0, y_0, h) - \Phi(x_0, y_0, h)$ mit

$$
\Delta(x_0, y_0, h) = \begin{cases} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}, & h \neq 0 \\ f(x_0, y_0), & h = 0. \end{cases}
$$

Das Einschrittverfahren hat die **Konsistenzordnung** p, falls für den lokalen Diskretisierungsfehler gilt

$$
\Theta(x_0, y_0, h) = O(h^p)
$$

für $h \to 0$ für alle $(x_0, y_0) \in G$ und für alle $f \in C^p$.

Eulersches (Konsistenzordnung 1**) und Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung** 2

$$
\Phi_\beta(x, y, h) = (1 - \beta)\, f(x, y) + \beta f\left(x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta} f(x, y)\right), \ \beta > 0.
$$

Halbschrittverfahren: $\beta = 1$ — Heun-Verfahren $\beta = \frac{1}{2}$ — Eulersches Verfahren $\beta = 0$

Taylorreihe von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um x_0: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Approximation der zweiten Ableitung für C^4-Funktionen $y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O\left(h^2\right)$.

Matrixnormen

1. $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\dots,m} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ ("*Spaltensummennorm*")
2. $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$ ("*Spektralnorm*")
3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ ("*Zeilensummennorm*")