Notizen Numerische Methoden SS 2019
Newton-Verfahren Vorlesung 27.06.19

Newton-Verfahren: $x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei x^0 ein Startwert ist.

Satz 5.1 Sei $F : [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $F(x^*) = 0$. Seien $\alpha, \beta > 0$ so, dass $|F'(x)| \geq \alpha$ und $|F''(x)| \leq \beta$ für alle $x \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$. Dann gilt für $k = 0, 1, 2 \ldots$:

$$|x^* - x^{k+1}| \leq \frac{\beta}{2\alpha} |x^* - x^k|^2.$$

Falls zusätzlich $|x^* - x^0| < \frac{2\alpha}{\beta}$ gilt, so hat man $x^k \to x^*$ für $k \to \infty$.

Die Abschätzung wird im Skript gezeigt.

Beweis des Zusatzes. Setze $q_k := |x^* - x^k|$, $k \in \mathbb{N}$, und $C := \frac{\beta}{2\alpha}$. Dann gilt $q_{k+1} \leq C q_k^2$ für alle k. Wir nehmen nun $\eta := C q_0 \in [0, 1)$ an und zeigen, dass $q_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Zunächst gilt $Cq_1 \leq C^2 q_0^2 = \eta^2$ und $Cq_2 \leq C^2 q_1^2 \leq \eta^4$. Weiter haben wir $Cq_3 \leq C^2 q_2^2 \leq \eta^8$ und $Cq_4 \leq C^2 q_3^2 \leq \eta^{16}$. So fortfahrend zeigt man induktiv, dass $Cq_k \leq \eta^{2^k}$ für jedes k gilt. Wegen $0 \leq \eta < 1$ folgt also $q_k \leq C^{-1} \eta^{2^k} \to 0$ für $k \to \infty$. ∎

Man beachte, dass die Folge (q_k) im Beweis "sehr schnell" gegen 0 konvergiert, was an der quadratischen Abschätzung liegt. Man sieht außerdem, dass $x^k \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_2]$ ist, wenn $q_0 \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt.