18.04.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

1. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 03.05.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Aufwandberechnung)

Bestimmen Sie den jeweiligen notwendigen Rechenaufwand für das Invertieren einer regulären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, der Berechung von $x = A^{-1}b$ für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{C}^n$, sowie für die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Aufgabe 2 (LR-Zerlegung I)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ -1 \\ 41 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix A.

(b) Lösen Sie die beiden Gleichungssysteme
$$Ax_1 = b_1 \text{ und } Ax_2 = b_2.$$

(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

Aufgabe 3 (LR-Zerlegung II)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 6 & 14 \\ 4 & -1 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -24 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A und geben Sie die dazugehörige Permutationsmatrix P an mit $PA = LR$.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$.

(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

Aufgabe 4 (LR-Zerlegung bei Tridiagonalmatrizen)

(a) Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h. die Matrix T ist von der Form

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

für $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Sei nun $a_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Zeigen Sie, dass eine LR-Zerlegung der Tridiagonalmatrix T gegeben ist durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & g_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g_n & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit rekursiv definierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= a_1, \\ g_i &= \frac{c_i}{\alpha_{i-1}}, \ \alpha_i = a_i - g_i \beta_{i-1}, \ \beta_{i-1} = b_{i-1} \text{ für alle } i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung für $n = 12$, $b_i = c_{i+1} = -1$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $a_i = 4$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Hinweise:

- Die erste Übung ist am Freitag, den 03.05.2019. Die Übungstermine sind etwa alle zwei Wochen (mit ein paar Unregelmäßigkeiten). Eine genauere Darstellung der Übungstermine ist auf der Homepage zu finden.
- In der Übung werden hauptsächlich die Aufgaben vorgerechnet und Tipps, Hinweise, etc. gegeben.
- Auf der Homepage werden nach der jeweiligen Übung Lösungsvorschläge veröffentlicht.
- Es wird in der Vorlesungsfreien Zeit eine schriftliche Klausur geben. Ein genauer Termin wird in der Vorlesung, Übung sowie auf der Homepage veröffentlicht, genauso wie die dazu zugelassenen Hilfsmittel.