18.04.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Aufwandberechnung)

Bestimmen Sie den jeweiligen notwendigen Rechenaufwand für das Invertieren einer regulären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, der Berechung von $x = A^{-1}b$ für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{C}^n$, sowie für die LR-Zerlegung für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Lösung von Aufgabe 1

1. Invertieren bzw. A^{-1} bilden: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre/ invertierbare Matrix. Wir beschreiben die einzelnen Teilschritte und zählen dabei stets die auftretenden Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen (d.h. die arithmetischen Operationen). Unsere Ausgangslage beim Invertieren ist die folgende:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} * & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir zählen aber getrennt, was auf der linken und was auf der rechten Seite der oberen Matrix geschieht.
Schritt 1. Linke Seite in eine obere Dreiecksgestalt bringen: In Schritt $j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{array}{c|c} (n-j)\cdot(n-j) = (n-j)^2 \text{ Multiplikationen} & (j-1)\cdot(n-j) \text{ Multiplikationen} \\ (n-j)\cdot(n-j) = (n-j)^2 \text{ Additionen} & (j-1)\cdot(n-j) \text{ Additionen} \end{array}.$$

Nach Schritt 1. haben wir durch diese Umformungen folgendes erreicht:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} * & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots & * & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & 1 \end{array}\right).$$

Schritt 2. Normierung der Hauptdiagonalen der linken Seite: In der $j$ten Zeile ($j = 1, \dots, n$)

$$n-j \text{ Divisionen} \;\Big|\; j \text{ Divisionen} \;.$$

Nach Schritt 2. haben wir durch diese Umformungen folgendes erreicht:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & \dots & * & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \end{array}\right).$$

Schritt 3. Einheitsmatrix bilden auf der linken Seite: In Schritt $j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{array}{c|c} 0 \text{ Multiplikationen} & (n-j)\cdot n \text{ Multiplikationen} \\ 0 \text{ Additionen} & (n-j)\cdot n \text{ Additionen} \end{array}.$$

Nach Schritt 3. haben wir durch diese Umformungen folgendes erreicht:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

und die rechte Seite ist die gesuchte Inverse A^{-1} der Matrix A. Für den Rechenaufwand beim Invertieren müssen wir nun noch alles zusammenzählen. Wir verwenden im folgenden die Summenformel, welche sich per Vollständige Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$ beweisen lässt:

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Der Rechenaufwand ergibt sich nun durch

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} \left[2(n-j)^2 + 2(j-1)(n-j) + 2 \cdot 0 + 2n(n-j)\right] + \sum_{j=1}^{n} [n-j+j] \\
&= 2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[2jn - 2j^2 + 2n^2 - 2nj - 2(n-j)\right] + \sum_{j=1}^{n} n \\
&= 2\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[-2j^2 + 2n^2 - 2(n-j)\right] + n^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left[2j^2 - 2j^2 + 2n^2 - 2(n-j)\right] + n^2 \\
&= 2\sum_{j=1}^{n-1} \left[n^2 - n + j\right] \\
&= 2\left[n^2(n-1) - n(n-1) + \frac{(n-1)n}{2}\right] + n^2 = 2n^3 - 2n^2 - 2n^2 + 2n + n^2 - n + n^2 = 2n^3 - 2n^2 + n,
\end{aligned}$$

wobei wir auch ausgenutzt haben, dass

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2$$

ist. Wir sehen der Rechenaufwand befindet sich in $O\left(n^3\right)$.

2. LR-Zerlegung (ohne Spaltenpivotisierung): Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix so, dass diese eine LR-Zerlegung besitzt, d.h. eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wobei jeder Eintrag auf der Hauptdiagonalen gleich 1 ist, und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$A = LR.$$

Unsere Ausgangssituation ist die folgende

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

In Schritt $j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{gathered}(n-j) \cdot (n-j) = (n-j)^2 \text{ Multiplikationen,} \\ (n-j) \cdot (n-j) = (n-j)^2 \text{ Additionen.}\end{gathered}$$

Nun haben wir die gewünschte Form aus der wir die Matrizen L und R ablesen können (siehe auch Aufgabe 2. und/ oder 3.):

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden im folgenden die Summenformel, welche sich per Vollständige Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$ beweisen lässt:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Der Rechenaufwand ergibt sich nun durch

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[2(n-j)^2\right] = 2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 = 2\sum_{j=1}^{n-1} j^2$$

$$= 2 \cdot \frac{(n-1)n\,(2(n-1)+1)}{6} = \frac{\left(n^2-n\right)(2n-1)}{3} = \frac{2n^3-3n^2+n}{3} = \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{3}n.$$

Wir sehen der Rechenaufwand befindet sich in $O\left(n^3\right)$.
2*. LR-Zerlegung (mit Spaltenpivotisierung): Im Grunde ist es erstmal derselbe Rechenaufwand wie bei der normalen LR-Zerlegung ohne Spaltenpivotisierung allerdings kommt nun noch vor jedem Schritt eine Vertauschung hinzu, d.h. in Schritt $j = 1, \ldots, n-1$:

1 Vertauschung.

Der Rechenaufand ist dann

$$\frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{3}n + \sum_{j=1}^{n-1} = \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{3}n + (n-1) = \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{4}{3}n - 1.$$

Wir sehen der Rechenaufwand befindet sich in $O\left(n^3\right)$.
3. $x = A^{-1}b$ berechnen: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre/ invertierbare Matrix mit der Inversen $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sowie $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor. Unsere Ausgangssituation ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x := A^{-1}b = \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * \\ * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Je Komponente von x haben wir

n Multiplikationen
$n-1$ Additionen.

Der Rechenaufwand ergibt sich nun durch

$$\sum_{j=1}^{n} [n + (n-1)] = \sum_{j=1}^{n} [2n-1] = (2n-1)\,n = 2n^2 - n.$$

Wir sehen der Rechenaufwand befindet sich in $O\left(n^2\right)$. □

Bemerkungen: In der Literatur (oder dem Internet) finden sich unterschiedliche Angaben zu den Rechenaufwänden, das hängt damit zusammen was man genau zählt und wie viele Einsparungen man schafft. Auch macht es historisch bedingt Sinn Additionen/ Subtraktionen nicht mit einzukalkulieren, ich habe es hierbei doch getan, der Klarheit wegen. Weiter habe ich versucht hier immer das bestmögliche zu machen um keine unnötigen Rechnungen zu haben, aber selbst wenn gröber gerechnet wird, kommt man tendenziell immer auf ähnliche Ergebnisse. Wir werden im Laufe der Vorlesung noch weitere Rechenaufwände aufbringen und diese miteinander vergleichen.
Kurz zum O-Kalkül bzw. Landau-Symbole: Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ zwei Folgen, dann definieren wir:

$$a \in O(b) \text{ für } n \to \infty,$$

falls eine Konstante $K > 0$ und ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren so, dass

$$|a_k| \leq K\,|b_k| \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq k_0.$$

Oftmals schreibt man auch

$$a = O(b).$$

Dies lässt sich auch noch verallgemeinern und auf Funktionen übertragen.

Aufgabe 2 (LR-Zerlegung I)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ -1 \\ 41 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix A.

(b) Lösen Sie die beiden Gleichungssysteme

$$Ax_1 = b_1 \text{ und } Ax_2 = b_2.$$

(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Wir führen den Algorithmus der LR-Zerlegung Schritt für Schritt durch:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \; + \\ \cdot 3 \; + \\ \cdot(-\frac{7}{2}) \; + \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -3 & \frac{13}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 0 \; + \\ \cdot 1 \; + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-\frac{3}{2}) \; + \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir nun die beiden Dreiecksmatrizen L und R ab:

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

So gilt:

$$A = LR.$$

(b) Wir lösen erstmal $Ax_1 = b_1$.
Schritt 0. Umschreiben: Zu lösen ist nach (a)

$$b_1 = Ax_1 = L\underbrace{Rx_1}_{=:y_1} = Ly_1.$$

Schritt 1. Vorwärtseinsetzen: Löse $Ly_1 = b_1$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ -1 \\ 41 \end{pmatrix} = b_1 \overset{!}{=} Ly_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_1^{(3)} \\ y_1^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} + \frac{1}{2}y_1^{(1)} \\ y_1^{(3)} - 3y_1^{(1)} \\ y_1^{(4)} + \frac{7}{2}y_1^{(1)} - y_1^{(2)} + \frac{3}{2}y_1^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $y_1 = \left(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_1^{(3)}, y_1^{(4)}\right)^T$:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 3, \\ y_1^{(2)} &= -21 - \frac{3}{2} = -\frac{45}{2}, \\ y_1^{(3)} &= -1 + 9 = 8, \\ y_1^{(4)} &= 41 - \frac{21}{2} - \frac{45}{2} - 12 = 41 - \frac{66}{2} - 12 = 41 - 33 - 12 = 41 - 45 = -4. \end{aligned}$$

Schritt 2. Rücksubstitution: Löse $Rx_1 = y_1$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{45}{2} \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = y_1 \stackrel{!}{=} Rx_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_1^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^{(1)} - 2x_1^{(2)} + x_1^{(3)} - 2x_1^{(4)} \\ 3x_1^{(2)} - \frac{1}{2}x_1^{(3)} + 3x_1^{(4)} \\ 4x_1^{(3)} + 2x_1^{(4)} \\ 2x_1^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}\right)^T$:

$$\begin{aligned}
2x_1^{(4)} &= -4 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(4)} = -2, \\
4x_1^{(3)} &= 8 + 4 = 12 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(3)} = 3, \\
3x_1^{(2)} &= -\frac{45}{2} + \frac{3}{2} + 6 = -\frac{42}{2} + 6 = -21 + 6 = -15 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(2)} = -5, \\
2x_1^{(1)} &= 3 - 10 - 3 - 4 = -14 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(1)} = -7.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungsvektor x_1 aufstellen: Die Lösung vom Gleichungssystem $Ax_1 = b_1$ lautet

$$x_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Lösen wir nun $Ax_2 = b_2$.
Schritt 0. Umschreiben: Zu lösen ist nach (a)

$$b_2 = Ax_2 = L \underbrace{Rx_2}_{=:y_2} = Ly_2.$$

Schritt 1. Vorwärtseinsetzen: Löse $Ly_2 = b_2$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = b_2 \stackrel{!}{=} Ly_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ y_2^{(3)} \\ y_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} + \frac{1}{2}y_2^{(1)} \\ y_2^{(3)} - 3y_2^{(1)} \\ y_2^{(4)} + \frac{7}{2}y_2^{(1)} - y_2^{(2)} + \frac{3}{2}y_2^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $y_2 = \left(y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, y_2^{(3)}, y_2^{(4)}\right)^T$:

$$\begin{aligned}
y_2^{(1)} &= 2, \\
y_2^{(2)} &= -3 - 1 = -4, \\
y_2^{(3)} &= -6 + 6 = 0, \\
y_2^{(4)} &= 3 - 7 - 4 - 0 = -8.
\end{aligned}$$

Schritt 2. Rücksubstitution: Löse $Rx_2 = y_2$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = y_2 \stackrel{!}{=} Rx_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2^{(1)} - 2x_2^{(2)} + x_2^{(3)} - 2x_2^{(4)} \\ 3x_2^{(2)} - \frac{1}{2}x_2^{(3)} + 3x_2^{(4)} \\ 4x_2^{(3)} + 2x_2^{(4)} \\ 2x_2^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $x_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, x_2^{(4)}\right)^T$:

$$\begin{aligned}
2x_2^{(4)} &= -8 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(4)} = -4, \\
4x_2^{(3)} &= 0 + 8 = 8 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(3)} = 2, \\
3x_2^{(2)} &= -4 + 1 + 12 = 9 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(2)} = 3, \\
2x_2^{(1)} &= 2 + 6 - 2 - 8 = -2 \ \Leftrightarrow\ x_1^{(1)} = -1.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungsvektor x_2 aufstellen: Die Lösung vom Gleichungssystem $Ax_2 = b_2$ lautet

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(c) Seien $(l_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ und $(r_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ die Komponenten der Matrizen L bzw. R. Dann folgt auf Grund der Dreiecksgestalt dieser beiden:

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{4} \underbrace{l_{ii}}_{=1} = \prod_{i=1}^{4} 1 = 1,$$
$$\det(R) = \prod_{i=1}^{4} r_{ii} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 6 \cdot 8 = 48.$$

Die Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{C}^{4\times 4} \to \mathbb{C}$ ist multiplikativ (d.h. für Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt stets $\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$), also folgt damit und mit den oberen Erkenntnissen, dass

$$\det(A) = \det(L \cdot R) = \det(L) \cdot \det(R) = 1 \cdot 48 = 48.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Determinante von der Matrix A ungleich null ist, d.h. dass die Matrix A regulär/ invertierbar sein muss. □

Bemerkung: Der LR-Algorithmus gibt uns also insbesondere eine gute Möglichkeit auch die Determinante einer Matrix zu bestimmen und somit auch z.B. herauszufinden, ob die Matrix nun invertierbar ist oder nicht. Allgemein gilt, falls die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine LR-Zerlegung hat, also $A = LR$ ist, dass

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L) \cdot \det(R) = 1 \cdot \det(R) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

ist.

Aufgabe 3 (*LR*-Zerlegung II)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 6 & 14 \\ 4 & -1 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -24 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A und geben Sie die dazugehörige Permutationsmatrix P an mit $PA = LR$.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$.

(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

Lösung von Aufgabe 3

(a) Wir führen den Algorithmus der LR-Zerlegung Schritt für Schritt durch:

$$\begin{array}{c}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{III})\\(\mathrm{IV})\end{array}\begin{pmatrix} 4 & 14 & 6 & 14 \\ 4 & -1 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c}(\mathrm{III})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{I})\\(\mathrm{IV})\end{array}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 6 & 14 \\ 2 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix} \cdot(-\tfrac{1}{2}) \quad \cdot(-\tfrac{1}{2}) \quad \cdot(-\tfrac{1}{4})$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}(\mathrm{III})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{I})\\(\mathrm{IV})\end{array}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & -3 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 12 & 3 & 12 \\ \frac{1}{4} & -6 & -\frac{27}{2} & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c}(\mathrm{III})\\(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{IV})\end{array}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 12 & 3 & 12 \\ \frac{1}{2} & -3 & 4 & 1 \\ \frac{1}{4} & -6 & -\frac{27}{2} & -10 \end{pmatrix} \cdot\tfrac{1}{4} \quad \cdot\tfrac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}(\mathrm{III})\\(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{IV})\end{array}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 12 & 3 & 12 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{4} & 4 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -12 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c}(\mathrm{III})\\(\mathrm{I})\\(\mathrm{IV})\\(\mathrm{II})\end{array}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 12 & 3 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -12 & -4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{4} & 4 \end{pmatrix} \cdot\tfrac{19}{48}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}(\mathrm{III})\\(\mathrm{I})\\(\mathrm{IV})\\(\mathrm{II})\end{array}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 12 & 3 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -12 & -4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{19}{48} & \frac{29}{12} \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir nun die beiden Dreiecksmatrizen L und R ab, sowie aus den römischen Ziffern die Permutationsmatrix P:

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{19}{48} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R := \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{12} \end{pmatrix}.$$

So gilt:

$$PA = LR.$$

(b) Wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$ lösen.
Schritt 1. Umformen: Es gilt nach Teil (a):

$$Ax = b \iff \widetilde{b} := Pb = PAx = L\underbrace{Rx}_{=:y} = Ly,$$

da Permutationsmatrizen stets regulär/ invertierbar sind (siehe Bemerkung am Ende der Aufgabe 3.). Weiter ist

$$\widetilde{b} = Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -24 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 6 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. Vorwärtseinsetzen: Lösen wir erstmal $Ly = \widetilde{b}$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} -24 \\ 6 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \widetilde{b} \overset{!}{=} Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{19}{48} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_3 + \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ y_4 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{19}{48}y_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= -24,\\
y_2 &= 6 + 12 = 18,\\
y_3 &= -5 + 6 + 9 = 10,\\
y_4 &= -7 + 12 + \frac{9}{2} + \frac{95}{24} = 5 + \frac{108+95}{24} = 5 + \frac{203}{24} = \frac{120+203}{24} = \frac{323}{24}.
\end{aligned}$$

Schritt 2. Rücksubstitution: Lösen wir nun $Rx = y$. Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ 10 \\ \frac{323}{24} \end{pmatrix} = y \overset{!}{=} Rx = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ 12x_2 + 3x_3 + 12x_4 \\ -12x_3 - 4x_4 \\ \frac{29}{12}x_4 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$:

$$\begin{aligned}
\frac{29}{12}x_4 &= \frac{323}{24} \;\Leftrightarrow\; x_4 = \frac{323}{58},\\
-12x_3 &= 10 + \frac{646}{29} = \frac{646+290}{29} = \frac{936}{29} \;\Leftrightarrow\; x_3 = -\frac{78}{29},\\
12x_2 &= 18 + \frac{234}{29} - \frac{1938}{29} = 18 - \frac{1704}{29} = \frac{522-1704}{29} = -\frac{1182}{29} \;\Leftrightarrow\; x_2 = -\frac{197}{58},\\
8x_1 &= -24 + \frac{394}{29} + \frac{468}{29} - \frac{646}{29} = -24 + \frac{216}{29} = \frac{-696+216}{29} = -\frac{480}{29} \;\Leftrightarrow\; x_1 = -\frac{60}{29}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungsvektor x aufstellen: Die Lösung vom Gleichungssystem $PAx = Pb = \widetilde{b}$ lautet

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{60}{29} \\ -\frac{197}{58} \\ -\frac{78}{29} \\ \frac{323}{58} \end{pmatrix} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} 120 \\ 197 \\ 156 \\ -323 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Damit löst der obere Vektor x auch das Gleichungssystem $Ax = b$.
(c) Seien $(l_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ und $(r_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ die Komponenten der Matrizen L bzw. R. Dann folgt auf Grund der Dreiecksgestalt dieser beiden:

$$\begin{aligned}
\det(L) &= \prod_{i=1}^{4} \underbrace{l_{ii}}_{=1} = \prod_{i=1}^{4} 1 = 1,\\
\det(R) &= \prod_{i=1}^{4} r_{ii} = 8 \cdot 12 \cdot (-12) \cdot \frac{29}{12} = -8 \cdot 12 \cdot 29 = -2784.
\end{aligned}$$

Es gilt für die Determinante der Permutationsmatrix P (siehe auch die Bemerkung zu Permutationsmatrizen am Ende von Aufgabe 3.):

$$\det(P) = (-1)^{\text{Anzahl der Vertauschungen}} = (-1)^3 = -1.$$

Die Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{C}^{4\times 4} \to \mathbb{C}$ ist multiplikativ (d.h. für Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt stets $\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$), also folgt damit und mit den oberen Erkenntnissen, dass

$$\begin{aligned}
-\det(A) = \det(P) \cdot \det(A) = \det(P \cdot A) = \det(L \cdot R) = \det(L) \cdot \det(R) = 1 \cdot (-2784) = -2784\\
\Leftrightarrow\; \det(A) = 2784.
\end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass die Determinante von der Matrix A ungleich null ist, d.h. dass die Matrix A regulär/ invertierbar sein muss. □

Bemerkung: Eine Permutationsmatrix/ Vertauschungsmatrix $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal den Eintrag 1 und sonst nur Null. Damit sind z.B. nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz diese stets regulär/ invertierbar mit

$$\begin{aligned}
\det(P) &= \pm 1, \text{ genauer } \det(P) = (-1)^{\text{Anzahl der Vertauschungen, die } P \text{ macht}},\\
P^{-1} &= P^T.
\end{aligned}$$

Ist $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine weitere Permutationsmatrix, so ist auch das Produkt $PQ \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix.

Aufgabe 4 (LR-Zerlegung bei Tridiagonalmatrizen)

(a) Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h. die Matrix T ist von der Form

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

für $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Sei nun $a_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Zeigen Sie, dass eine LR-Zerlegung der Tridiagonalmatrix T gegeben ist durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & g_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g_n & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit rekursiv definierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= a_1, \\ g_i &= \frac{c_i}{\alpha_{i-1}}, \ \alpha_i = a_i - g_i\beta_{i-1}, \ \beta_{i-1} = b_{i-1} \text{ für alle } i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung für $n = 12$, $b_i = c_{i+1} = -1$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $a_i = 4$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Lösung von Aufgabe 4

(a) Wir rechnen dies für die einzelnen Zeilen nach. Es gebe $j = 1, \ldots, n$ die Zeile an.
Erste Zeile $j = 1$: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} a_1 &\stackrel{!}{=} 1 \cdot \alpha_1 = \alpha_1 = a_1, \\ b_1 &\stackrel{!}{=} 1 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \alpha_2 = \beta_1 = b_1. \end{aligned}$$

Beliebige Zeile in der Mitte $j = 2, \ldots, n-1$: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} a_j &\stackrel{!}{=} g_j \cdot \beta_{j-1} + 1 \cdot \alpha_j = g_j\beta_{j-1} + a_j - g_j\beta_{j-1} = a_j, \\ b_j &\stackrel{!}{=} 0 \cdot g_j + 1 \cdot \beta_j + 0 \cdot \alpha_{j+1} = \beta_j = b_j, \\ c_j &\stackrel{!}{=} 0 \cdot \beta_{j-2} + g_j \cdot \alpha_{j-1} + 1 \cdot 0 = g_j\alpha_{j-1} = \frac{c_j}{\alpha_{j-1}} \cdot \alpha_{j-1} = c_j, \text{ falls } j \neq 2, \\ c_2 &\stackrel{!}{=} g_2 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot 0 = g_2\alpha_1 = \frac{c_2}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 = c_2. \end{aligned}$$

Letzte Zeile $j = n$: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{!}{=} g_n \cdot \beta_{n-1} + 1 \cdot \alpha_n = g_j\beta_{n-1} + a_n - g_n\beta_{n-1} = a_n, \\ c_n &\stackrel{!}{=} 0 \cdot \beta_{n-2} + g_n \cdot \alpha_{n-1} + 1 \cdot 0 = g_j\alpha_{n-1} = \frac{c_n}{\alpha_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1} = c_n. \end{aligned}$$

$\square$

(b) Hier haben wir die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Teil (a) liefert uns nun für die LR-Zerlegung:

$$\begin{aligned}
&\beta_j = -1 \text{ für alle } j = 1, \dots, 12, \\
&\alpha_1 = 4, \\
&g_2 = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} \text{ und } \alpha_2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}, \\
&g_3 = \frac{-4}{15} = -\frac{4}{15} \text{ und } \alpha_3 = 4 - \frac{4}{15} = \frac{60-4}{15} = \frac{56}{15}, \\
&g_4 = \frac{-15}{56} = -\frac{15}{56} \text{ und } \alpha_4 = 4 - \frac{15}{56} = \frac{224-15}{56} = \frac{209}{56}, \\
&g_5 = \frac{-56}{209} = -\frac{56}{209} \text{ und } \alpha_5 = 4 - \frac{56}{209} = \frac{836-56}{209} = \frac{780}{209}, \\
&g_6 = \frac{-209}{780} = -\frac{209}{780} \text{ und } \alpha_6 = 4 - \frac{209}{780} = \frac{3120-209}{780} = \frac{2911}{780}, \\
&g_7 = \frac{-780}{2911} = -\frac{780}{2911} \text{ und } \alpha_7 = 4 - \frac{780}{2911} = \frac{11644-780}{2911} = \frac{10864}{2911}, \\
&g_8 = \frac{-2911}{10864} = -\frac{2911}{10864} \text{ und } \alpha_8 = 4 - \frac{2911}{10864} = \frac{43456-2911}{10864} = \frac{40545}{10864}, \\
&g_9 = \frac{-10864}{40545} = -\frac{10864}{40545} \text{ und } \alpha_9 = 4 - \frac{10864}{40545} = \frac{162180-10864}{40545} = \frac{151316}{40545}, \\
&g_{10} = \frac{-40545}{151316} = -\frac{40545}{151316} \text{ und } \alpha_{10} = 4 - \frac{40545}{151316} = \frac{605264-40545}{151316} = \frac{564719}{151316}, \\
&g_{11} = \frac{-151316}{564719} = -\frac{151316}{564719} \text{ und } \alpha_{11} = 4 - \frac{151316}{564719} = \frac{2258876-151316}{564719} = \frac{2107560}{564719}, \\
&g_{12} = \frac{-564719}{2107560} = -\frac{564719}{2107560} \text{ und } \alpha_{12} = 4 - \frac{564719}{2107560} = \frac{8430240-564719}{2107560} = \frac{7865521}{2107560},
\end{aligned}$$

Dies ergibt die beiden Matrizen L und R nach Teil (a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{56} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{56}{209} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{209}{780} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{780}{2911} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2911}{10864} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10864}{40545} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{40545}{151316} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{151316}{564719} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{564719}{2107560} & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{56} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{780}{209} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2911}{780} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10864}{2911} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{40545}{10864} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{151316}{40545} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{564719}{151316} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2107560}{564719} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7865521}{2107560} \end{pmatrix}.$$

Nun gilt:

$$T = LR.$$

□

(c) / **Bemerkung**: Ich habe den ursprünglichen Teil (c) gestrichen. Hierbei ging es um die Aufwandsberechnung der LR-Zerlegung bei dünnbesetzten Matrizen. Dazu muss man sich erstmal überlegen, was eine dünnbesetzte Matrix ist. Dafür gibt es keine einheitliche Definition. Im Wesentlichen gibt es drei unterschiedliche Definition, und die Gesamtheit der Matrizen, die eine der drei erfüllen, bilden die dünnbesetzten Matrizen.
"Definition": (Dünnbesetzte Matrix) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Wir nennen die Matrix A dünnbesetzt, falls eine der folgenden drei Bedingungen zutrifft:

(1) Die Matrix A enthält so viele Nullen, dass man diese Nulleinträge berücksichtigen kann bzw. es sich lohnt.

(2) Die Anzahl der Nicht-Null-Einträge der Matrix A liegt in $O(n)$ oder in $O(n \log(n))$.

(3) Es existiert eine Konstante $1 \leq l << n$ so, dass jede Zeile und jede Spalte von der Matrix A höchstens l Nicht-Null-Einträge hat.

Keiner der jeweiligen oberen drei Eigenschaften folgt aus den anderen. Nun ist oftmals die bestimmte Form entscheidend dafür bzw. eine mögliche Permutation zu einer besseren Matrix den Rechenaufwand entscheidend zu verbessern. So stimmt es zwar, dass sich der Rechenaufwand des LR-Algorithmuses für dünnbesetzte Matrizen auf $O(n)$ oder $O(n \log(n))$ reduzieren lässt, aber nur nach geeigneter Permutation der Matrix. Das die Permutation dabei eine entscheidende Rolle spielt, sehen wir am folgenden Beispiel dieser zwei Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \vdots & \ddots & * & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen sind permutiert zu einander und beide sind dünnbesetzt. Führen wir allerdings stumpf den LR-Algorithmus aus, so bekommen wir im Fall von der Matrix A_1 direkt nach dem ersten Schritt eine vollbesetzte Matrix und haben nichts mehr gewonnen (im Sinne von dem Rechenaufwand). Wohingegen im Fall von der Matrix A_2 sind wir nach einem Schritt fertig, also würde unser Aufwand genau eine Multiplikation und eine Addition betragen. Demnach lohnt sich das Permutieren. Es sollte nun auch klar sein, dass wir nicht so leicht zeigen können, dass sich der Aufwand reduzieren lässt bei dünnbesetzten Matrizen, da diese je nach Gestalt erstmal geeignet permutiert werden müssen.
Wir berechnen nun noch den Rechenaufwand für den in Teil (a) erbrachten Algorithmus: Für $j = 2, \dots, n$ benötigen wir

1 Division,
1 Multiplikation,
1 Addition.

Dies macht in der Summe:

$$\sum_{j=2}^{n} [1 + 1 + 1] = \sum_{j=2}^{n} 3 = 3(n-1) = 3n - 3.$$

Demnach liegt der Rechenaufwand für eine LR-Zerlegung bei Tridiagonalmatrizen in $O(n)$. □