

# Numerische Methoden

## 2. Übungsblatt

(wird am Freitag, den 17.05.2019 besprochen)

### Aufgabe 1 (Fehlendes und Ergänzendes aus bzw. zur Vorlesung)

Seien  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix und  $x \in \mathbb{C}^n$  ein Vektor. Zeigen Sie, die nachfolgenden Aussagen:

- (a) Ist  $A$  regulär, so gilt  $A^H$  ist regulär mit  $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$ .
- (b) Es ist  $A^{HH} := (A^H)^H = A$  und  $x^{HH} := (x^H)^H = x$ .
- (c) Sei  $A$  hermitesch, dann ist die Matrix  $A$  positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $A$  positiv sind. (**Hinweis:** Nutzen Sie ihr Wissen über hermitesche Matrizen und Diagonalisierbarkeit.)
- (d) Ist die Matrix  $A$  positiv definit, so ist diese auch regulär.
- (e) Seien  $a \in \mathbb{C}$  ein Skalar,  $n \geq 2$  und  $B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$  eine weitere Matrix und setze

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

- (e1) Die Matrix  $\tilde{B}$  ist hermitesch genau dann, wenn  $a \in \mathbb{R}$  und die Matrix  $B$  hermitesch ist.
- (e2) Die Matrix  $\tilde{B}$  ist positiv definit genau dann, wenn  $a \in (0, \infty)$  und die Matrix  $B$  positiv definit ist.

### Aufgabe 2 (Rechenaufwand der Cholesky-Zerlegung)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine hermitesche und positiv definite Matrix. Geben Sie den Rechenaufwand für die Cholesky-Zerlegung der Matrix  $A$  an. Wie viele arithmetische Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen) werden dabei benötigt? Wie viele Wurzeloperationen werden dabei benötigt?

### Aufgabe 3 (Cholesky-Zerlegung I)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Matrix  $A$  hermitesch/ symmetrisch aber nicht positiv definit ist.
- (b) Führen Sie dennoch den Algorithmus zur Cholesky-Zerlegung der Matrix  $A$  durch.
- (c) Lösen Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$  mithilfe der berechneten Zerlegung aus (b). Geben Sie alle Lösungen an.

#### Aufgabe 4 (Vertiefung: Cholesky-Zerlegung und kurz zur $LR$ -Zerlegung)

- (a) Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix. Zeigen Sie, dass falls es eine untere Dreiecksmatrix  $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit positiven Einträgen auf der Hauptdiagonalen gibt so, dass  $A = LL^H$  ist, die Matrix  $A$  hermitesch und positiv definit sein muss.
- (b) Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix mit einer Cholesky-Zerlegung  $A = LL^H$ . Geben Sie unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von der Matrix  $A$  eine Formel für die Determinante von der Matrix  $A$  an.
- (c) Finden Sie ein Beispiel für eine vollbesetzte, nicht positiv definite  $2 \times 2$ -Matrix  $A$ , sowie eine untere Dreiecksmatrix  $L \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  mit  $A = LL^H$ . Wieso ist dies kein Widerspruch zu (a)?
- (d) Zeigen Sie, dass falls eine  $LR$ -Zerlegung einer regulären Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert, diese eindeutig ist. Was gilt bei der Cholesky-Zerlegung?

#### Aufgabe 5 (Cholesky-Zerlegung II)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 5 & 26 & 16 & 47 \\ 3 & 16 & 14 & 35 \\ 9 & 47 & 35 & 95 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix  $A$ .
- (b) Ist die Matrix  $A$  hermitesch/ symmetrisch? Ist die Matrix  $A$  positiv definit?

#### Hinweise:

- Die Übungstermine sind etwa alle zwei Wochen (mit ein paar Unregelmäßigkeiten). Eine genauere Darstellung der Übungstermine ist auf der Homepage zu finden.
- In der Übung werden hauptsächlich die Aufgaben vorgerechnet und Tipps, Hinweise, etc. gegeben.
- Auf der Homepage werden nach der jeweiligen Übung Lösungsvorschläge veröffentlicht.
- Es wird in der Vorlesungsfreien Zeit eine schriftliche Klausur geben. Diese findet am Freitag, den 06.09.2019 von 08.00 Uhr bis 10.00 Uhr statt.