10.05.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Fehlendes und Ergänzendes aus bzw. zur Vorlesung)

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und $x \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor. Zeigen Sie, die nachfolgenden Aussagen:

(a) Ist A regulär, so gilt A^H ist regulär mit $\left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$.

(b) Es ist $A^{HH} := \left(A^H\right)^H = A$ und $x^{HH} := \left(x^H\right)^H = x$.

(c) Sei A hermitesch, dann ist die Matrix A positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix A positiv sind. (**Hinweis**: Nutzen Sie ihr Wissen über hermitesche Matrizen und Diagonalisierbarkeit.)

(d) Ist die Matrix A positiv definit, so ist diese auch regulär.

(e) Seien $a \in \mathbb{C}$ ein Skalar, $n \geq 2$ und $B \in C^{(n-1)\times(n-1)}$ eine weitere Matrix und setze

$$\widetilde{B} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(e1) Die Matrix $\widetilde{B}$ ist hermitesch genau dann, wenn $a \in \mathbb{R}$ und die Matrix B hermitesch ist.

(e2) Die Matrix $\widetilde{B}$ ist positiv definit genau dann, wenn $a \in (0, \infty)$ und die Matrix B positiv definit ist.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Wenn A regulär ist, existiert eine zu A inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, d.h. es gilt:

$$A^{-1}A = I_n = AA^{-1}.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} I_n = I_n^H &= \left(A^{-1}A\right)^H = A^H \left(A^{-1}\right)^H \\ \text{und } I_n = I_n^H &= \left(AA^{-1}\right)^H = \left(A^{-1}\right)^H A^H. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass A^H regulär ist mit Inverser $\left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$. $\square$

(b) Wir können die Aussage noch etwas allgemeiner schreiben. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine Matrix. Die hermitesche Matrix zu A ist definiert durch

$$A^H := \overline{A}^T \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Nun gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$:

$$A^{HH} = \left(A^H\right)^H = \left(\overline{A}^T\right)^H = \overline{\left(\overline{A}^T\right)}^T = \underbrace{\left(A^T\right)^T}_{=:A^{TT}} = A.$$

Dies war gerade zu zeigen, da die Aussage nun für $m = n$ bzw. $m = 1$ folgt. $\square$

(c) Wir zeigen für diese Äquivalenz zwei Richtungen.

"$\Rightarrow$": Siehe Vorlesung Aufgabe 1.18; oder hier nochmal der Beweis: Sei A nun positiv definit und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Eigenwert, d.h. es gibt einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ (den sogenannten Eigenvektor) so, dass $Ax = \lambda x$ ist. Es gilt nun wegen der positiven Definitheit der Matrix A:

$$0 < x^H Ax = x^H (Ax) = x^H (\lambda x) = \lambda \overline{x}^T x = \lambda \left(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\right) = \lambda \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \lambda |x|^2 \Leftrightarrow \lambda > 0,$$

da $|x| > 0$ ist wegen $x \neq 0$.
"$\Leftarrow$": Sei nun die Matrix A hermitesch und alle Eigenwerte der Matrix A seien positiv. Da die Matrix A hermitesch ist, ist die Matrix A unitär diagonalisierbar, d.h. mit Hilfe der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von A, sowie den zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ (v_1 ist Eigenvektor zu λ_1, v_2 ist Eigenvektor zu λ_2, usw.) definieren wir die Matrizen

$$D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ und } S := \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right),$$

dabei ist nun S unitär (d.h. S ist regulär mit Inverser $S^{-1} = S^H = \overline{S}^T$) und es gilt die Zerlegung

$$A = SDS^{-1} = SDS^H.$$

Sei nun $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ ein beliebiger Vektor, so ist nach Teil (a) die Matrix S^H regulär, da die Matrix S regulär war und demnach $y := (y_1, \ldots, y_n) := S^H x \neq 0$. Damit folgt nun die positive Definitheit der Matrix A:

$$x^H A x = x^H S D S^H x = \left(S^H x\right)^H D \left(S^H x\right) = y^H D y = \overline{y}^T D y = \lambda_1 |y_1|^2 + \ldots + \lambda_n |y_n|^2 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{>0} |y_j|^2 > 0,$$

da $y \neq 0$ ist, muss es ein Index $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ geben mit $y_{j_0} \neq 0$ und so auch $|y_{j_0}|^2 > 0$. Also ist die Matrix A positiv definit. Dies war gerade zu zeigen. □
(d) Ist die Matrix A positiv definit, so sind laut Aufgabe 1.18 alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ auch positiv. Für die Determinante einer Matrix A gilt nun, dass sie insbesondere das Produkt all ihrer Eigenwerte ist, d.h.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{>0} > 0,$$

also insbesondere ist $\det(A) \neq 0$ und damit ist die Matrix A regulär. □
(e1) Es gilt die Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \widetilde{B} \text{ ist hermitesch } &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \widetilde{B} = \widetilde{B}^H = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & B^H \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a = \overline{a} \text{ und } B = B^H \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \text{ und } B^H = B \\ &\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \text{ und die Matrix } B \text{ hermitesch ist.} \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □
(e2) Wir zeigen hier zwei Richtungen für die Äquivalenz.
"$\Leftarrow$": Als erstes sei $a > 0$ und die Matrix B positiv definit. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ ein beliebiger Vektor. Dann gilt wegen $a > 0$ und der positiven Definitheit der Matrix B:

$$x^H \widetilde{B} x = x^H \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} x = \underbrace{a}_{>0} |x_1|^2 + \underbrace{\widetilde{x}^H B \widetilde{x}}_{>0 \text{ für } \widetilde{x} \neq 0} > 0,$$

wobei wir

$$\widetilde{x} := (x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^{n-1}$$

gesetzt haben. Also ist die Matrix $\widetilde{B}$ ebenfalls positiv definit.
"$\Rightarrow$": Sei nun die Matrix $\widetilde{B}$ positiv definit. Aus dem Satz 1.17 folgt nun direkt, dass

$$a = B_{11} > 0$$

ist. Sei nun $x \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{0\}$ ein beliebiger Vektor und setze

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Weiter ist $y \neq 0$, da $x \neq 0$ ist. Aus der positiven Definitheit der Matrix $\widetilde{B}$ folgt nun

$$x^H B x = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = y^H \widetilde{B} y > 0,$$

d.h. dass die Matrix B positiv definit ist. Damit wären beide Richtungen gezeigt und die Aussage folgt. □

Aufgabe 2 (Rechenaufwand der Cholesky-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche und positiv definite Matrix. Geben Sie den Rechenaufwand für die Cholesky-Zerlegung der Matrix A an. Wie viele arithmetische Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen) werden dabei benötigt? Wie viele Wurzeloperationen werden dabei benötigt?

Lösung von Aufgabe 2

Für die $i = 1, \ldots, n$-te Zeile haben wir: Für den $k = 1, \ldots, i-1$-ten Eintrag gilt:

$$\begin{gathered} 1 \text{ Division}, \\ k-1 \text{ Multiplikationen}, \\ k-1 \text{ Additionen}. \end{gathered}$$

Für den $i$ten Eintrag gilt:

$$\begin{gathered} i-1 \text{ Multiplikationen}, \\ i-1 \text{ Additionen}, \\ 1 \text{ Wurzeloperationen}. \end{gathered}$$

Für den Rechenaufwand der arithmetischen Operationen gilt somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{i-1} (1 + (k-1) + (k-1)) + (i-1) + (i-1) \right] &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{i-1} (2k-1) + 2(i-1) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[2 \cdot \frac{(i-1)i}{2} - (i-1) + 2(i-1) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[i^2 - i + i - 1 \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[i^2 - 1 \right] \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n = \frac{\left(n^2 + n\right)(2n+1)}{6} - n \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n, \end{aligned}$$

wobei wir die beiden Summenformeln (beweisbar per vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} j &= \frac{m(m+1)}{2}, \\ \sum_{j=1}^{m} j^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ benutzt haben. Also haben wir $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ arithmetische Rechenoperationen. Weiter haben wir

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \text{ Wurzeloperationen}.$$

Der Rechenaufwand befindet sich also in $O\left(n^3\right)$. □

Aufgabe 3 (Cholesky-Zerlegung I)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 17 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A hermitesch/ symmetrisch, aber nicht positiv definit ist.

(b) Führen Sie dennoch den Algorithmus zur Cholesky-Zerlegung der Matrix A durch.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mithilfe der berechneten Zerlegung aus (b). Geben Sie alle Lösungen an.

Lösung von Aufgabe 3

(a) Die Matrix A ist in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, daher ist $\overline{A} = A$ und wir sehen, dass

$$A^H = \overline{A}^T = A^T = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 17 \end{pmatrix} = A$$

ist, d.h. die Matrix A ist hermitesch/ symmetrisch. Als nächstes bestimmen wir die Eigenwerte. Dazu gilt nach der Regel von Sarrus für das charakteristische Polynom p_A zur Matrix A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) = \det &\begin{pmatrix} 9-\lambda & 3 & 9 \\ 3 & 9-\lambda & 11 \\ 9 & 11 & 17-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (9-\lambda)(9-\lambda)(17-\lambda) + 3\cdot 11\cdot 9 + 9\cdot 3\cdot 11 - 9\cdot(9-\lambda)\cdot 9 - 11\cdot 11\cdot(9-\lambda) - (17-\lambda)\cdot 3\cdot 3 \\ &= (9-\lambda)^2(17-\lambda) + 2\cdot 11\cdot 27 - 81(9-\lambda) - 121(9-\lambda) - 9(17-\lambda) \\ &= (9-\lambda)^2(17-\lambda) + 594 - 729 - 1089 - 153 + 81\lambda + 121\lambda + 9\lambda \\ &= (9-\lambda)^2(17-\lambda) + 211\lambda - 1377 \\ &= \left(\lambda^2 - 18\lambda + 81\right)(17-\lambda) + 211\lambda - 1377 \\ &= \left(-\lambda^3 + 17\lambda^2 + 18\lambda^2 - 306\lambda - 81\lambda + 1377\right) + 211\lambda - 1377 \\ &= -\lambda^3 + 35\lambda^2 - 176\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 35\lambda + 176\right) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte ergeben sich nun aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A, d.h.

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ ist ein Eigenwert der Matrix } A \;\Leftrightarrow\; -\lambda\left(\lambda^2 - 35\lambda + 176\right) = p_A(\lambda) = 0.$$

Wir sehen direkt, dass so $\lambda_1 = 0$ ein Eigenwert von der Matrix A sein muss. Wäre nun die Matrix A positiv definit, dann würde aus Aufgabe 1.(c) (oder Aufgabe 1.18 vom Skript) folgen, dass alle Eigenwerte von der Matrix A positiv sind, d.h. wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix A wäre, wäre $\lambda > 0$. Aber es gilt:

$$\lambda_1 = 0 \text{ ist ein Eigenwert der Matrix } A,$$

also kann die Matrix A nicht positiv definit sein. Zudem sehen wir nun direkt, dass die Matrix A irregulär sein muss, da die Determinante insbesondere als Produkt der Eigenwerte beschrieben werden kann, folgt nun ($\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ seien die zwei weiteren Eigenwerte der Matrix A)

$$\det(A) = \underbrace{\lambda_1}_{=0} \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$$

und somit kann die Matrix A nicht regulär sein. $\square$

(b) Obwohl die Voraussetzungen für die Cholesky-Zerlegung nicht erfüllt sind, können wir manchmal dennoch den Algorithmus davon anwenden, so wie in diesem Fall. Wir gehen Schrittweise vor. Zu berechnen ist die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. $i = 1$: Hier haben wir nur

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3.$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Schritt 2. $i = 2$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1,\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{9 - 1^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 3 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. $i = 3$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{32} &= \frac{1}{l_{22}} \left(a_{32} - l_{31}\overline{l_{21}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(11 - 3 \cdot \overline{1}\right) = \frac{11 - 3 \cdot 1}{2\sqrt{2}} = \frac{11-3}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{17 - 3^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{17 - 9 - 8} = \sqrt{0} = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Nun ist, da $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist:

$$L^H = \overline{L}^T = L^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt nun die folgende Zerlegung von der Matrix A:

$$A = LL^H = LL^T.$$

(c) Zu lösen ist das lineare Gleischungssystem $Ax = b$. Wir gehen dabei wieder in mehreren Schritten vor.
Schritt 0. Umformen: Es gilt nach Teil (b):

$$b = Ax = L\underbrace{L^T x}_{=:y} = Ly.$$

Schritt 1. Vorwärtseinsetzen: Lösen wir zuerst das lineare Gleichungssystem $Ly = b$. Dazu muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix} = b \overset{!}{=} Ly = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_1 + 2\sqrt{2}y_2 \\ 3y_1 + 2\sqrt{2}y_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $y = (y_1, y_2, y_3)^T$:

$$\begin{aligned} 3y_1 = 24 \ &\Leftrightarrow\ y_1 = 8, \\ 2\sqrt{2}y_2 = 16 - 8 = 8 \ &\Leftrightarrow\ y_2 = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \\ y_3 &= t \text{ für alle } t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine ganze Schar an Lösungen der Form

$$y(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2\sqrt{2} \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{C}.$$

Schritt 2. Rücksubstitution: Lösen wir nun $L^T x = y(t)$ für bestimmte $t \in \mathbb{C}$. Dazu muss gelten

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2\sqrt{2} \\ t \end{pmatrix} = y(t) \overset{!}{=} L^T x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{2}x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dadurch sehen wir, dass $t = 0$ sein muss, und das zu lösende Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{2}x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Komponenten von $x = (x_1, x_2, x_3)^T$:

$$\begin{aligned} x_3 &= s, \\ 2\sqrt{2}x_2 &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}s \;\Leftrightarrow\; x_2 = 1 - s, \\ 3x_1 &= 8 - (1 - s) - 3s = 7 - 2s \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{7 - 2s}{3} \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$.

Schritt 3. Lösungsvektoren $x(s)$ **aufstellen**: Die Lösungen von dem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ haben die Form

$$x(s) = \begin{pmatrix} \frac{7-2s}{3} \\ 1 - s \\ s \end{pmatrix}$$

für $s \in \mathbb{C}$ bzw. wenn wir nur an reellen Lösungen interessiert sind, sind diese von der Form

$$x(s) = \begin{pmatrix} \frac{7-2s}{3} \\ 1 - s \\ s \end{pmatrix}$$

für $s \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 4 (Vertiefung: Cholesky-Zerlegung und kurz zur LR-Zerlegung)

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass falls es eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit positiven Einträgen auf der Hauptdiagonalen gibt so, dass $A = LL^H$ ist, die Matrix A hermitesch und positiv definit sein muss.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit einer Cholesky-Zerlegung $A = LL^H$. Geben Sie unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von der Matrix A eine Formel für die Determinante von der Matrix A an.

(c) Finden Sie ein Beispiel für eine vollbesetzte, nicht positiv definite 2×2-Matrix A, sowie eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $A = LL^H$. Wieso ist dies kein Widerspruch zu (a)?

(d) Zeigen Sie, dass falls eine LR-Zerlegung einer regulären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, diese eindeutig ist. Was gilt bei der Cholesky-Zerlegung?

Lösung von Aufgabe 4

(a) Wenn die Matrix A sich zerlegen lässt mit einer unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit positiven Einträgen auf der Hauptdiagonalen durch

$$A = LL^H,$$

dann wissen wir, direkt, dass

$$A^H = \left(LL^H\right)^H = \left(L^H\right)^H L^H = LL^H = A$$

laut Aufgabe 1.(b), d.h. die Matrix A ist hermitesch. Weiter ist so eine Matrix L regulär und nach Aufgabe 1.(a) auch die hermitesche Matrix L^H und damit folgt für $x \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, dass auch $L^H x \neq 0$ ist. Sei nun $x \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ beliebig und setze $y := L^H x \neq 0$. Dann gilt:

$$x^H A x = x^H LL^H x = \left(L^H x\right)^H \left(L^H x\right) = y^H y = \overline{y}^T y = |y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = |y| > 0.$$

Damit ist die Matrix A positiv definit. Also haben wir gezeigt, dass aus einer gegebenen Cholesky-Zerlegung der Matrix A direkt folgt, dass die Matrix A hermitesch und positiv definit sein muss. $\square$

(b) Hat nun die Matrix A eine Zerlegung mit einer unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ der Form, dass

$$A = LL^H$$

gilt, so erhalten wir durch die Multiplikativität der Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ die Formel

$$\det(A) = \det\left(LL^H\right) = \det(L)\cdot\det\left(L^H\right) = \det(L)\cdot\det\left(\overline{L}^T\right) = \det(L)\cdot\det\left(\overline{L}\right) = \det(L)\cdot\overline{\det(L)} = |\det(L)|^2$$
$$= \left|\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right|^2 = \prod_{i=1}^{n} |l_{ii}|^2.$$

Bemerkung: Diese Formel gilt für jede Zerlegung der Form $A = LL^H$, also auch, wenn auf der Hauptdiagonale nicht nur positive Einträge stehen.

(c) Setze

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } L := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und deshalb $\overline{A} = A$ und wir haben

$$A^H = \overline{A}^T = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A,$$

d.h. A ist hermitesch/ symmetrisch. Weiter ist die Matrix A vollbesetzt und es gilt $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so ist $\overline{L} = L$, wodurch

$$L^H = \overline{L}^T = L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Außerdem ist

$$LL^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Andererseits ist die Matrix A nicht positiv definit, was wir z.B. an den Eigenwerten sehen können, denn es gilt für das charakteristische Polynom p_A von A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot 1 = \left(1 - 2\lambda + \lambda^2\right) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ und daher sind die Eigenwerte der Matrix A gerade die Nullstellen vom charakteristischen Polynom von A, also

$$\lambda(\lambda - 2) = p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \iff \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = 2,$$

d.h. nicht alle Eigenwerte sind positiv, was im Fall von positiv definit nach Aufgabe 1.(c) bzw. Aufgabe 1.18 sein müsste. Dies ist kein Widerspruch zu Teil (a), da die Einträge auf der Hauptdiagonalen der Matrix L nicht alle positiv sind, genauer $l_{22} = 0$ ist nicht positiv. □

(d) **Eindeutigkeit der LR-Zerlegung bei regulären Matrizen**: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Angenommen es gebe zwei LR-Zerlegungen, d.h. es gebe zwei untere Dreiecksmatrien $L, \widetilde{L} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wo alle Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind und zwei obere Dreiecksmatrizen $R, \widetilde{R} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$\widetilde{L}\widetilde{R} = A = LR.$$

Die Matrizen L und $\widetilde{L}$ sind Dreiecksmatrizen, daher lässt sich deren Determinante berechnen durch

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{l_{ii}}_{=1} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \neq 0,$$
$$\det\left(\widetilde{L}\right) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\widetilde{l}_{ii}}_{=1} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \neq 0,$$

was insbesondere zeigt, dass die Matrix L regulär ist (da die Determinante von L ungleich null ist), also $L^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert. Auf Grund der Multiplikativität der Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$, der Regularität von der Matrix A und wegen $\det\left(\widetilde{L}\right) = 1$ folgt nun

$$0 \neq \det(A) = \det\left(\widetilde{L}\widetilde{R}\right) = \underbrace{\det\left(\widetilde{L}\right)}_{=1} \cdot \det\left(\widetilde{R}\right) = 1 \cdot \det\left(\widetilde{R}\right) = \det\left(\widetilde{R}\right),$$

also ist auch die Matrix $\widetilde{R}$ regulär, da die Determinanteungleich null ist, und so existiert die Inverse $\widetilde{R}^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann erhalten wir durch Umformung:

$$LR = A = \widetilde{L}\widetilde{R} \iff R = I_nR = L^{-1}LR = L^{-1}\widetilde{L}\widetilde{R} \iff \widetilde{R}^{-1}R = L^{-1}\widetilde{L}\widetilde{R}\widetilde{R}^{-1} = L^{-1}\widetilde{L}I_n = L^{-1}\widetilde{L}.$$

Untere/ Obere Dreiecksmatrizen bilden eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation, damit sind L^{-1} bzw. $\widetilde{R}^{-1}$ wieder untere/ obere Dreiecksmatrix und die Produkte $L^{-1}\widetilde{L}$ bzw. $R\widetilde{R}^{-1}$ ist wieder eine untere/ obere Dreiecksmatrix. Also steht auf der linken Seite eine untere Dreiecksmatrix und auf der rechten Seite eine obere Dreiecksmatrix, die einzige Möglichkeit ist nun, dass die beiden Produkte $L^{-1}\widetilde{L}$ und $R\widetilde{R}^{-1}$ dieselbe Diagonalmatrix bilden. Da bei L und $\widetilde{L}$ die Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind, sind es diese auch bei L^{-1} so auch bei dem Produkt $L^{-1}\widetilde{L}$, d.h.

$$L^{-1}\widetilde{L} = I_n.$$

Also muss

$$\widetilde{L} = L$$

gelten. Mit dem Wissen folgt nun auch, da die Matrix L regulär ist, dass

$$LR = A = \widetilde{L}\widetilde{R} = L\widetilde{R} \iff R = I_nR = L^{-1}LR = L^{-1}L\widetilde{R} = I_n\widetilde{R} = \widetilde{R}.$$

Also ist die LR-Zerlegung in dem Fall einer regulären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eindeutig.

Nicht-Eindeutigkeit der LR-Zerlegung für beliebige Matrizen: Für nicht-reguläre Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ muss dies nicht gelten, denn

$$0 = L \cdot 0 \text{ für alle Matrizen } L \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

also insbesondere auch für alle unteren Dreiecksmatrizen, wo alle Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind.

Eindeutigkeit der Cholesky-Zerlegung: Die Cholesky-Zerlegung ist durch seine Berechnungsvorschrift stets eindeutig gegeben, wenn wir immer ein positives Vorzeichen auf der Hauptdiagonalen von der Matrix L fordern. □

Aufgabe 5 (Cholesky-Zerlegung II)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 5 & 26 & 16 & 47 \\ 3 & 16 & 14 & 35 \\ 9 & 47 & 35 & 95 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A.

(b) Ist die Matrix A hermitesch/ symmetrisch? Ist die Matrix A positiv definit?

Lösung von Aufgabe 5

(a) Wir gehen Schrittweise vor. Zu berechnen ist die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. $i = 1$: Hier haben wir nur

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1.$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Schritt 2. $i = 2$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{5}{1} = 5, \; l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{26 - 5^2} = \sqrt{26 - 25} = \sqrt{1} = 1, \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{3}{1} = 3, \\ l_{41} &= \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{9}{1} = 9. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 9 & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. $i = 3$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{32} &= \frac{1}{l_{22}} \left(a_{32} - l_{31}\overline{l_{21}} \right) = \frac{1}{1} \left(16 - 3 \cdot \overline{5} \right) = 16 - 3 \cdot 5 = 16 - 15 = 1, \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{14 - 3^2 - 1^2} = \sqrt{14 - 9 - 1} = \sqrt{4} = 2, \\ l_{42} &= \frac{1}{l_{22}} \left(a_{42} - l_{41}\overline{l_{21}} \right) = \frac{1}{1} \left(47 - 9 \cdot \overline{5} \right) = 47 - 9 \cdot 5 = 47 - 45 = 2. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Schritt 4. $i = 4$: Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} l_{43} &= \frac{1}{l_{33}} \left(a_{43} - l_{41}\overline{l_{31}} - l_{42}\overline{l_{32}} \right) = \frac{1}{2} \left(35 - 9 \cdot \overline{3} - 2 \cdot \overline{1} \right) = \frac{35 - 9 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{2} = \frac{35 - 27 - 2}{2} = \frac{6}{2} = 3, \\ l_{44} &= \sqrt{a_{44} - |l_{41}|^2 - |l_{42}|^2 - |l_{43}|^2} = \sqrt{95 - 9^2 - 2^2 - 3^2} = \sqrt{95 - 81 - 4 - 9} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist, da $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist:

$$L^H = \overline{L}^T = L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt nun die folgende Zerlegung von der Matrix A:

$$A = LL^H = LL^T.$$

(b) Nach Aufgabe 4.(a) ist die Matrix A hermitesch/ symmetrisch und positiv definit, da die Matrix A eine Cholesky-Zerlegung besitzt. $\square$