21.05.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

3. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 24.05.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Satz von Gerschgorin)

Beweisen Sie den "*Satz von Gerschgorin*": Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann sind alle Eigenwerte der Matrix A in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$\mathcal{K}_i := \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ik}| =: r_i \right\},\ 1 \leq i \leq n,$$

genauer:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda \text{ ist ein Eigenwert der Matrix } A\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i.$$

Und folgern Sie daraus das Korollar: Ist die Vereinigung $M_1 = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{K}_{i_j}$ disjunkt von der Vereinigung M_2 der übrigen Kreise, also

$$\emptyset = M_1 \cap M_2 = \left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{K}_{i_j} \right) \cap M_2,$$

so enthält M_1 genau k und M_2 genau $n-k$ Eigenwerte von der Matrix A (nach algebraischer Vielfachheit gezählt).
Lässt sich der Satz von Gerschgorin noch verbessern indem man die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ betrachtet?
Wenden Sie die Resultate auf die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 2 (Rechenaufwand und Konvergenzrate)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Geben Sie den Rechenaufwand für den von-Mises Algorithmus aus der Vorlesung bis zum $k$ten Schritt, $k \in \mathbb{N}$, an. Wovon hängt die Konvergenzgeschwindigkeit ab? Wann liegt eine schnelle Konvergenz vor? Wann ist eher eine langsame zu erwarten?

Aufgabe 3 (Weiteres Problem bei Eigenwertbestimmung)

Eigenwerte sind bestimmt durch die Nullstellen von dem jeweiligen charakteristischem Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und in der Vorlesung haben wir gelernt, dass dieses "*Nullstellen bestimmen*" numerisch instabil ist. Wozu die Numerik hier? Reicht die Algebra nicht größtenteils aus? Dies ist die Fragestellung der folgenden Aufgabe, welche ein weiteres vorhergehendes Problem aufwirft. Sei

$$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \right),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

ein (normiertes) Polynom vom Grad n mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Finden Sie eine Matrix A mit charakteristischem Polynom $p_A = p$ auf $\mathbb{C}$. Welche Äquivalenz erhalten wir so daraus?

Aufgabe 4 (Konvergenz/ Divergenz von Matrizen, Eigenwerten und Eigenvektoren)

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definieren wir die Matrix

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A_ε. Untersuchen Sie die Matrizenfamilie $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}\backslash\{0\}}$ für $\varepsilon \to 0$ auf Konvergenz, ebenso die Folge der Eigenwerte und der Eigenvektoren.

Aufgabe 5 (Von-Mises Iteration)

Gegeben sei die sogenannte zirkulante Shiftmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und der Startvektor

$$z^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin (siehe Aufgabe 1.), dass alle Eigenwerte der Matrix S in der abgeschlossenen Einheitskreischeibe liegen.

(b) Wie lautet die $k$te Iterierte der von-Mises-Iteration, wenn wir mit dem Startvektor $z^{(0)}$ beginnen?

(c) Konvergiert die von-Mises Iteration in diesem Fall? Falls nicht, wieso ist dies kein Widerspruch zur Vorlesung?

Aufgabe 6 (Inverses Iterationsverfahren von Wielandt)

Gegeben Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Schätzen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin ab (siehe Aufgabe 1.).

(b) Warum eignet sich $\lambda^{(0)} = 5$ als eine Approximation an einen Eigenwert? Führen Sie damit und mit dem Startvektor $y^{(0)} = (0,1,0)^T \in \mathbb{R}^3$ einen Schritt der inversen Iteration von Wielandt durch.

(c) Welche Möglichkeiten gebe es den Algorithmus von Wielandt für die nächsten Schritte zu verbessern?

Hinweis: Obwohl es diesmal sechs Aufgaben sind, ist es nicht mehr Aufwand als sonst. Die meisten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind relativ kurz oder schnell gelöst.