21.05.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Satz von Gerschgorin)

Beweisen Sie den "*Satz von Gerschgorin*": Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann sind alle Eigenwerte der Matrix A in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$\mathcal{K}_i := \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ik}| =: r_i \right\},\ 1 \leq i \leq n,$$

genauer:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda \text{ ist ein Eigenwert der Matrix } A\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i.$$

Und folgern Sie daraus das Korollar: Ist die Vereinigung $M_1 = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{K}_{i_j}$ disjunkt von der Vereinigung M_2 der übrigen Kreise, also

$$\emptyset = M_1 \cap M_2 = \left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{K}_{i_j} \right) \cap M_2,$$

so enthält M_1 genau k und M_2 genau $n-k$ Eigenwerte von der Matrix A (nach algebraischer Vielfachheit gezählt). Lässt sich der Satz von Gerschgorin noch verbessern indem man die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ betrachtet? Wenden Sie die Resultate auf die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

an.

Lösung von Aufgabe 1

Beweis von "*Satz von Gerschgorin*": Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Eigenwert der Matrix $A = (a_{ij})_{ij=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so finden wir einen Eigenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ zum Eigenwert λ, d.h. es ist $Ax = \lambda x$. Dies ergibt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_{ii}x_i + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = (Ax)_i = (\lambda x)_i = \lambda x_i$$
$$\Leftrightarrow\ (\lambda - a_{ii})\, x_i = \lambda x_i - a_{ii}x_i = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j.$$

Wähle einen Index $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$|x_{i_0}| = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k| > 0,$$

da $x \neq 0$ ist. Dies liefert für $i = i_0$ laut der Dreiecks-Ungleichung:

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| = |(\lambda - a_{i_0 i_0})\, x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1,\ j\neq i_0}^{n} a_{i_0 j}x_j \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1,\ j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j} x_j| = \sum_{j=1,\ j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}|\,|x_j| \\
&\leq \sum_{j=1,\ j\neq i_0} |a_{i_0 j}| \max_{k=1,\dots,n} |x_k| = \sum_{j=1,\ j\neq i_0} |a_{i_0 j}|\,|x_{i_0}| = \left(\sum_{j=1,\ j\neq i_0} |a_{i_0 j}|\right) |x_{i_0}| \\
\Leftrightarrow\ |\lambda - a_{i_0 i_0}| &\leq \sum_{j=1,\ j\neq i_0} |a_{i_0 j}|\,.
\end{aligned}
$$

Also ist $\lambda \in \mathcal{K}_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$. Da der Eigenwert λ beliebig war, folgt nun

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i.$$

□

Beweis vom Korollar: Wir zerlegen die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $D_A := \operatorname{diag}(a_{11},\dots,a_{nn}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Restmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch

$$A = D_A + R.$$

Weiter setzen wir für $t \in [0,1]$ die Matrix $A_t := D_A + tR$, d.h. $A_0 = D_A$ und $A_1 = A$. Aufgrund der Disjunktheit von M_1 und M_2 sind nun k Eigenwerte der Matrix A_0 in M_1 und $n-k$ Eigenwerte von A_0 in M_2. Wegen $t \in [0,1]$ folgt auch laut dem Satz von Gerschgorin:

$$\sigma(A_t) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i(A_t) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i(A_1) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i(A)\,.$$

Seien nun für $t \in [0,1]$

$$\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t) \in \mathbb{C} \text{ die Eigenwerte der Matrix } A_t.$$

O.B.d.A. seien $\lambda_1(0),\dots,\lambda_k(0) \in M_1$. Die Eigenwerte hängen stetig von der Matrix bzw. den Matrixeinträgen ab, dies besagt nun, dass die Kurven

$$\lambda_i\colon [0,1] \to \mathbb{C},\ i = 1,\dots,n,$$

verlassen die Mengen M_1 und M_2 nicht. Dies heißt nun

$$\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t) \in M_1 \text{ und } \lambda_{k+1}(t),\dots,\lambda_n(t) \in M_2 \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Dies gilt insbesondere für $t = 1$ und $\lambda_1(1),\dots,\lambda_n(1)$ sind die Eigenwerte der Matrix $A_1 = A$, also haben wir so

$$\lambda_1(1),\dots,\lambda_n(1) \in M_1 \text{ und } \lambda_{k+1}(1),\dots,\lambda_n(1) \in M_2,$$

d.h. es liegen k Eigenwerte der Matrix A in M_1 und die anderen $n-k$ Eigenwerte der Matrix A in M_2. □

Verbesserung von "*Satz von Gerschgorin*": Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und deren transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ haben diesselben Eigenwerte, d.h. $\sigma(A) = \sigma(A^T)$. Wenden wir den Satz von Gerschgorin nun ebenfalls auf die transponierte Matrix A^T an, erhalten wir dafür

$$\sigma(A) = \sigma(A^T) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i(A^T) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ji}| \right\},$$

da

$$\mathcal{K}_i(A^T) = \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ji}| \right\}$$

ist wegen $A^T = (a_{ji})_{j,i=1,\dots,n}$ ist. Insgesamt ergibt sich nun nach dem Satz von Gerschgorin:

$$
\begin{aligned}
\sigma(A) &\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i(A)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i(A^T)\right) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ji}| \right\}\right).
\end{aligned}
$$

□

Anwendung des "*Satzes von Gerschgorin*": Die transponierte Matrix hat die Gestalt

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & 2 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für die Matrix A:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(A) &= \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| \leq \frac{2}{10}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| \leq \frac{1}{5}\right\} = \overline{B_{\frac{1}{5}}(1)},\\
\mathcal{K}_2(A) &= \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-2| \leq \frac{1}{5} + 0\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-2| \leq \frac{1}{5}\right\} = \overline{B_{\frac{1}{5}}(2)},\\
\mathcal{K}_3(A) &= \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-3| \leq 0 + \frac{2}{5}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-3| \leq \frac{2}{5}\right\} = \overline{B_{\frac{2}{5}}(3)}.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die drei Mengen $\mathcal{K}_1(A), \mathcal{K}_2(A)$ und $\mathcal{K}_3(A)$ paarweise disjunkt sind zueinander. Wir erhalten nun für die transponierte Matrix A^T:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1\left(A^T\right) &= \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| \leq \frac{1}{5} + 0\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| \leq \frac{1}{5}\right\} = \mathcal{K}_1(A) = \overline{B_{\frac{1}{5}}(1)},\\
\mathcal{K}_2\left(A^T\right) &= \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-2| \leq \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-2| \leq \frac{5}{10}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-2| \leq \frac{1}{2}\right\} \overline{B_{\frac{1}{2}}(2)},\\
\mathcal{K}_3\left(A^T\right) &= \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-3| \leq \frac{1}{10} + 0\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-3| \leq \frac{1}{10}\right\} = \overline{B_{\frac{1}{10}}(3)}.
\end{aligned}$$

Auch hier sehen wir, dass die drei Mengen $\mathcal{K}_1\left(A^T\right), \mathcal{K}_2\left(A^T\right)$ und $\mathcal{K}_3\left(A^T\right)$ paarweise disjunkt sind zueinander, sowie die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(A) &= \mathcal{K}_1\left(A^T\right),\\
\mathcal{K}_2(A) &\subseteq \mathcal{K}_2\left(A^T\right),\\
\mathcal{K}_3(A) &\supseteq \mathcal{K}_3\left(A^T\right)
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{K}_i(A) \cap \mathcal{K}_j\left(A^T\right) = \emptyset \text{ für alle } i,j \in \{1,2,3\} \text{ mit } i \neq j \text{ gelten.}$$

Damit, dem Satz von Gerschgorin bzw. seiner Verbesserung folgt nun

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &\subseteq \left(\mathcal{K}_1(A) \dot{\cup} \mathcal{K}_2(A) \dot{\cup} \mathcal{K}_3(A)\right) \cap \left(\mathcal{K}_1\left(A^T\right) \dot{\cup} \mathcal{K}_2\left(A^T\right) \dot{\cup} \mathcal{K}_3\left(A^T\right)\right)\\
&= \mathcal{K}_1(A) \dot{\cup} \mathcal{K}_2(A) \dot{\cup} \mathcal{K}_3\left(A^T\right)\\
&= \overline{B_{\frac{1}{5}}(1)} \dot{\cup} \overline{B_{\frac{1}{5}}(2)} \dot{\cup} \overline{B_{\frac{1}{10}}(3)}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen: Wir nennen die Menge der Eigenwerte $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ das Spektrum der Matrix A. Weiter heißen die Menge

$$\mathcal{K}_i(A) = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} |a_{ij}|\right\}$$

für $i = 1, \ldots, n$ der $i$te Gerschgorin-Kreise der Matrix A. Und zu einem Zentrum $z_0 \in \mathbb{C}$ und einem Radius $r > 0$ definieren wir den Ball um das Zentrum/ den Mittelpunkt z_0 mit Radius r in $\mathbb{C}$ durch

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| < r\} \subseteq \mathbb{C},$$

sowie dessen Abschluss in $\mathbb{C}$:

$$D_r(z_0) := \overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| \leq r\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Aufgabe 2 (Rechenaufwand und Konvergenzrate)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| .$$

Geben Sie den Rechenaufwand für den von-Mises Algorithmus aus der Vorlesung bis zum $k$ten Schritt, $k \in \mathbb{N}$, an. Wovon hängt die Konvergenzgeschwindigkeit ab? Wann liegt eine schnelle Konvergenz vor? Wann ist eher eine langsame zu erwarten?

Lösung von Aufgabe 2

Der Algorithmus der von-Mises Iteration lautet:
Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$.
$k$ter Schritt: $(k \in \mathbb{N})$

$$z^{(k)} := Ax^{(k-1)},$$
$$x^{(k)} := \frac{z^{(k)}}{z^{(k)}_{i_k}} \text{ mit Index } i_k \in \{1, \dots, n\} \text{ so, dass } \left|z^{(k)}_{i_k}\right| = \max_{j=1,\dots,n} \left|z^{(k)}_j\right| =: \|z\|_\infty \text{ gilt.}$$

Rechenaufwand: Der Aufwand in jedem Schritt:
Berechnung von $z^{(k)}$/ Matrix-Vektor-Produkt:

$$n^2 = n \cdot n \text{ Multiplikationen,}$$
$$n \cdot (n-1) \text{ Additionen.}$$

Berechnung von $x^{(k)}$:

$$n \text{ Divisionen.}$$

Nach k Schritten $(k \in \mathbb{N})$ haben wir den (arithmetischen) Rechenaufwand:

$$\sum_{j=1}^{k} \left[n^2 + n \cdot (n-1) + n\right] = \sum_{j=1}^{k} \left[n^2 + n^2 - n + n\right] = \sum_{j=1}^{k} \left[2n^2\right] = 2kn^2$$

Der Rechenaufwand liegt also in $O\left(kn^2\right)$. □

Konvergenz (ohne Beweis): Die Konvergenz der von-Mises Iteration hängt maßgeblich von dem Quotient $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \in [0, 1)$ ab. Dies erkennen wir am Beweis der Konvergenz (siehe Skript). Genauer liegt die Konvergenz in der Klasse $O\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k\right)$.

Für symmetrische Matrizen (d.h. $A = A^T$) gilt sogar, dass die Konvergenz in der Klasse $O\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^{2k}\right)$ liegt.

Schnelle Konvergenz: Dies ist zu erwarten im Fall

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} << 1, \text{ d.h. viel kleiner als 1.}$$

Langsame Konvergenz: Dies ist zu erwarten im Fall

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \approx 1, \text{ d.h. nahe bei 1.}$$

□

Aufgabe 3 (Weiteres Problem bei Eigenwertbestimmung)

Eigenwerte sind bestimmt durch die Nullstellen von dem jeweiligen charakteristischem Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und in der Vorlesung haben wir gelernt, dass dieses "*Nullstellen bestimmen*" numerisch instabil ist. Wozu die Numerik hier? Reicht die Algebra nicht größtenteils aus? Dies ist die Fragestellung der folgenden Aufgabe, welche ein weiteres vorhergehendes Problem aufwirft. Sei

$$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

ein (normiertes) Polynom vom Grad n mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Finden Sie eine Matrix A mit charakteristischem Polynom $p_A = p$ auf $\mathbb{C}$. Welche Äquivalenz erhalten wir so daraus?

Lösung von Aufgabe 3

Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

hat das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dies beweisen wir per vollständiger Induktion über die Dimension $n \in \mathbb{N}$.
<u>Induktionsanfang (I.A.) $n = 1$:</u> Hier lautet die Matrix A gerade

$$A = \left(-a_0\right)$$

und das Polynom p

$$p(\lambda) = (-1)^1 (\lambda + a_0) = -(\lambda + a_0) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Das charakteristische Polynom ist nun

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_1) = \det(-\lambda - a_0) = -\lambda - a_0 = -(\lambda + a_0) = p(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.
<u>Induktionsvoraussetzung (I.V.):</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig und für dieses $n \in \mathbb{N}$ gelte, dass für alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ das charakteristische Polynom p_A der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

mit dem Polynom

$$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

auf ganz $\mathbb{C}$ übereinstimmt, d.h. $p_A = p$ auf $\mathbb{C}$.
<u>Induktionsschritt (I.S.) $n \to n + 1$:</u> Wir haben nun die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Wir berechnen mit Hilfe des Entwicklungssatz von Laplace (Erste Zeile) das charakteristische Polynom der Matrix A und nutzen dann die Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$p_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_{n+1}\right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda - a_n \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(-\lambda) \det \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda - a_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{n \times n}} + (-1)^{1+(n+1)}\left(-a_0\right) \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \dots & 0 & \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{(I.V.)}}{=} -(-1)^2 \lambda (-1)^n \left(\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda + a_1\right) + (-1)^{n+1} a_0 \prod_{i=1}^{n} 1$$
$$= (-1)^{n+1}\left(\lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda\right) + (-1)^{n+1} a_0 \cdot 1$$
$$= (-1)^{n+1} \lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = p(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Folgerung: Also ist

$$\text{Eigenwertbestimmung} \;\Leftrightarrow\; \text{Nullstellenbestimung bei (komplexen) Polynomen.}$$

Problem: Nach dem "*Satz von Abel*", der besagt, dass für allgemeine Polynome von Grad $n \geq 5$ gibt es kein allgemeingültiges Verfahren mehr zur Bestimmung der Nullstellen (Wurzeln), welches auf

$$+, -, \cdot, \div \text{ oder } \sqrt[k]{\cdot} \; (k \in \mathbb{N})$$

basiert. Also ist es unklar, wie wir Eigenwerte algebraisch bestimmen können. Und da kommt dann unter anderem die Numerik ins Spiel.

Aufgabe 4 (Konvergenz/ Divergenz von Matrizen, Eigenwerten und Eigenvektoren)

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definieren wir die Matrix

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A_ε. Untersuchen Sie die Matrizenfamilie $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}\backslash\{0\}}$ für $\varepsilon \to 0$ auf Konvergenz, ebenso die Folge der Eigenwerte und der Eigenvektoren.

Lösung von Aufgabe 4

Das charakteristische Polynom zur Matrix A_ε, $\varepsilon \neq 0$, lautet

$$\begin{aligned}
p_{A_\varepsilon}(\lambda) &= \det(A_\varepsilon - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \left(\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-\lambda\right)\left(\left(1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-\lambda\right)-\left(-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)^2 \\
&= \left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\left(1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-\lambda\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-\lambda\left(1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)+\lambda^2-\varepsilon^2\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\
&= 1-\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\varepsilon^2\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda-\lambda\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\lambda\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\lambda^2 \\
&= 1-\varepsilon^2\left(\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-2\lambda+\lambda^2 \\
&= \lambda^2-2\lambda+1-\varepsilon^2 = ((1-|\varepsilon|)-\lambda)((1+|\varepsilon|)-\lambda)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ laut dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}$$

und laut der Mitternachtsformel (oder $p-q$-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4(1-\varepsilon^2)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4+4\varepsilon^2}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4\varepsilon^2}}{2} = \frac{2\pm 2|\varepsilon|}{2} = 1\pm|\varepsilon| \in \mathbb{R}.$$

Damit lauten die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1(\varepsilon) = 1-|\varepsilon| \text{ und } \lambda_2(\varepsilon) = 1+|\varepsilon|.$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_1(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}(1-|\varepsilon|) = 1, \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_2(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}(1+|\varepsilon|) = 1.
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0}-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 =: A_0,
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right| &= \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon|\left|\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon| = 0, \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\left|-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right| &= \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon|\left|\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon| = 0
\end{aligned}$$

ist wegen der Beschränktheit durch 1 der beiden trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus. So konvergieren die Eigenwerte der Matrix A_ε gegen den Eigenwert der Matrix $A_0 = I_2$ für $\varepsilon \to 0$.

Divergenz der Eigenvektoren:

Zur Vereinfachung führen wir hier die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ ein durch

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Fall 1. $\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \neq -\operatorname{sign}(\varepsilon)$: Es gilt für die Eigenräume

$$\begin{aligned}
E_{1-|\varepsilon|} &= \ker\left(A_\varepsilon - (1-|\varepsilon|)\, I_2\right) = \ker\begin{pmatrix} |\varepsilon| + \varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & |\varepsilon| - \varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} \varepsilon\left(\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \varepsilon\left(\operatorname{sign}(\varepsilon) - \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad \cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon)+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \quad \mid \cdot \frac{1}{\operatorname{sign}(\varepsilon)+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\ \mid \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad + \end{array} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon)+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ \operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(\varepsilon) - \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} &= \frac{\left(\operatorname{sign}(\varepsilon) - \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\left(\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sign}^2(\varepsilon) - \cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - \sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\
&= \frac{1 - \left(\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + \cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = \frac{1-1}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = 0,
\end{aligned}$$

laut der (dritten) Binomischen Formel, $\operatorname{sign}^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt für den zweiten Eigenraum

$$\begin{aligned}
E_{1+|\varepsilon|} &= \ker\left(A_\varepsilon - (1+|\varepsilon|)\, I_2\right) = \ker\begin{pmatrix} -|\varepsilon| + \varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -|\varepsilon| - \varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} \varepsilon\left(-\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\left(\operatorname{sign}(\varepsilon) - \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad + \quad \mid \cdot \frac{1}{\operatorname{sign}(\varepsilon)+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon)+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \end{array} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon)+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
-\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} &= \frac{\left(-\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\left(\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) + \sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\
&= \frac{-\operatorname{sign}^2(\varepsilon) + \cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + \sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\
&= \frac{-1 + \left(\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + \cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = \frac{-1+1}{\operatorname{sign}(\varepsilon) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = 0,
\end{aligned}$$

laut der (dritten) Binomischen Formel, $\operatorname{sign}^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Fall 2. $\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) = -\operatorname{sign}(\varepsilon)$: Dies ist nur der Fall, falls $\frac{2}{\varepsilon} = k\pi$ ist für ein $k \in \mathbb{Z}$, dies liefert uns

$$\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) = \sin(k\pi) = 0.$$

Weiter gilt so für die Eigenräume bzw. die Eigenvektoren:

$$E_{1-|\varepsilon|} = \ker\left(A_\varepsilon - (1-|\varepsilon|)\, I_2\right) = \ker\begin{pmatrix} |\varepsilon| + \varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & |\varepsilon| - \varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ker \begin{pmatrix} |\varepsilon| - \operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon & 0 \\ 0 & |\varepsilon| - (-\operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} |\varepsilon| - |\varepsilon| & 0 \\ 0 & |\varepsilon| + |\varepsilon| \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\,|\varepsilon| \end{pmatrix} \quad | \cdot \tfrac{1}{2|\varepsilon|} \quad = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_{1+|\varepsilon|} &= \ker\left(A_\varepsilon - (1+|\varepsilon|)\, I_2\right) = \ker \begin{pmatrix} -|\varepsilon| + \varepsilon \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -|\varepsilon| - \varepsilon \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -|\varepsilon| - \operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon & 0 \\ 0 & -|\varepsilon| - (-\operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -|\varepsilon| - |\varepsilon| & 0 \\ 0 & -|\varepsilon| + |\varepsilon| \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -2\,|\varepsilon| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \left(-\tfrac{1}{2|\varepsilon|}\right) \quad = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Nun sehen wir ein, dass die Eigenvektoren nicht konvergieren (also divergieren), denn z.B. setze $\varepsilon_n := \frac{1}{2n\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$
\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0,
$$

aber

$$
v_{\varepsilon_n}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) \\ \operatorname{sign}(\varepsilon_n) + \cos\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(n\pi) \\ \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2n\pi}\right) + \cos(n\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + (-1)^n \end{pmatrix}
$$

konvergiert nicht für $n \to \infty$, da die zweite Komponente divergiert für $n \to \infty$. $\square$

Aufgabe 5 (Von-Mises Iteration)

Gegeben sei die sogenannte zirkulante Shiftmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und der Startvektor

$$z^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin (siehe Aufgabe 1.), dass alle Eigenwerte der Matrix S in der abgeschlossenen Einheitskreischeibe liegen.

(b) Wie lautet die $k$te Iterierte der von-Mises-Iteration, wenn wir mit dem Startvektor $z^{(0)}$ beginnen?

(c) Konvergiert die von-Mises Iteration in diesem Fall? Falls nicht, wieso ist dies kein Widerspruch zur Vorlesung?

Lösung von Aufgabe 5

(a) Für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\mathcal{K}_i(S) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \ |z - 0| \leq 1 + \sum_{j=1}^{n-2} 0 \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \colon \ |z| \leq 1 \} = \overline{B_1(0)} = D_1(0).$$

Weiter ist die transponierte Matrix von S gerade

$$S^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Da in jeder Zeile (bzw. auch in jeder Spalte) der Matrizen S und S^T stets nur ein Eintrag gleich 1 ist und der Rest Null, sowie die Hauptdiagonale nur Nulleinträge besitzt, sind nun alle Gerschgorinkreise gleich, d.h.

$$\mathcal{K}_i(S) = \mathcal{K}_i\left(S^T\right) = \{ z \in \mathbb{C} \colon \ |z - 0| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} \colon \ |z| \leq 1 \} = \overline{B}_1(0)$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Laut Aufgabe 1. bzw. dem Satz von Gerschgorin gilt damit

$$\sigma(S) \subseteq \overline{B}_1(0).$$

(b) Unser Startvektor lautet

$$x^{(0)} := z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1,$$

der sogenannte erste Einheitsvektor.

Schritt 1 der Von-Mises Iteration: Setze

$$z^{(1)} := Sz^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n.$$

Wählen wir nun den Index $i_1 \in \{1,\dots,n\}$ so, dass

$$\left|z_{i_1}^{(1)}\right| = \max_{j=1,\dots,n} \left|z_j^{(1)}\right| = 1,$$

dann ist $i_1 = n$ mit $z_{i_1}^{(1)} = (e_n)_n = 1$ und wir definieren

$$x^{(1)} := \frac{1}{z_{i_1}^{(1)}} z^{(1)} = \frac{1}{1} e_n = e_n.$$

Schritt 2 der Von-Mises Iteration: Setze

$$z^{(2)} := Sz^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{n-1}.$$

Wählen wir nun den Index $i_2 \in \{1,\dots,n\}$ so, dass

$$\left|z_{i_2}^{(2)}\right| = \max_{j=1,\dots,n} \left|z_j^{(2)}\right| = 1,$$

dann ist $i_2 = n-1$ mit $z_{i_2}^{(2)} = (e_{n-1})_{n-1} = 1$ und wir definieren

$$x^{(2)} := \frac{1}{z_{i_2}^{(2)}} z^{(2)} = \frac{1}{1} e_{n-1} = e_{n-1}.$$

Allgemein sehen wir so, dass für Schritt $j = 1,\dots,n-1$ folgt, dass

$$x^{(j)} = e_{n+1-j} \text{ und } x^{(n)} = e_1 = x^{(0)}$$

gilt. Anschließend wiederholt sich dies nochmals.
(c) **Frage der Konvergenz**: Nein, die Von-Mises Iteration konvergiert hier nicht, denn jeder der n Einheitsvektoren $e_1,\dots,e_n$ kommt beliebig oft als Iterierte vor, damit ist eine Konvergenz ausgeschlossen (per Definition).
Warum dies kein Widerspruch zum Satz/ zur Vorlesung ist: Um eine Konvergenz zu erhalten, brauchen wir mindestens zwei Eigenwerte, deren Beträge unterschiedlich sind. Dies ist hier nicht der Fall, was wir mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace einsehen können, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
p_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_n) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)\cdot(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda\cdot(-\lambda)^{n-1} - 1\cdot(-1)^{n-1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)^n - (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n \lambda^n - (-1)^n = (-1)^n \left[\lambda^n - 1\right],
\end{aligned}$$

d.h. wenn $\lambda_* \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix S ist, dann muss

$$(-1)^n \left[\lambda_*^n - 1\right] = p_A(\lambda_*) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_*^n - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_*^n = 1$$

gelten und damit auch

$$1 = |\lambda_*^n| = |\lambda_*|^n \;\Leftrightarrow\; |\lambda_*| = 1.$$

Also haben alle Eigenwerte der Matrix S den gleichen Betrag, wodurch eine Konvergenz nicht gewährleistet werden kann. □

Aufgabe 6 (Inverses Iterationsverfahren von Wielandt)

Gegeben Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Schätzen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin ab (siehe Aufgabe 1.).

(b) Warum eignet sich $\lambda^{(0)} = 5$ als eine Approximation an einen Eigenwert? Führen Sie damit und mit dem Startvektor $y^{(0)} = (0,1,0)^T \in \mathbb{R}^3$ einen Schritt der inversen Iteration von Wielandt durch.

(c) Welche Möglichkeiten gebe es den Algorithmus von Wielandt für die nächsten Schritte zu verbessern?

Lösung von Aufgabe 6

(a) Es gilt

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} = A,$$

d.h. die Matrix A ist symmetrisch. Also stimmen die Gerschgorin-Kreise der Matrizen A und A^T überein. Wir bestimmen diese:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(A) = \mathcal{K}_1\left(A^T\right) &= \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-5| \leq 1+2\} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-5| \leq 3\} = \overline{B_3(5)},\\
\mathcal{K}_2(A) = \mathcal{K}_2\left(A^T\right) &= \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-(-2)| \leq 1+2\} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z+2| \leq 3\} = \overline{B_3(-2)},\\
\mathcal{K}_3(A) = \mathcal{K}_3\left(A^T\right) &= \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-(-5)| \leq 2+2\} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z+5| \leq 4\} = \overline{B_4(-5)}.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die beiden Mengen

$$\overline{B_3(5)} \text{ und } \overline{B_3(-2)} \cup \overline{B_4(-5)}$$

disjunkt sind, d.h. es gilt

$$\overline{B_3(5)} \cap \left(\overline{B_3(-2)} \cup \overline{B_4(-5)}\right) = \emptyset.$$

Laut Aufgabe 1. bzw. dem Satz von Gerschgorin folgt nun

$$\sigma(A) \subseteq \overline{B_3(5)} \dot\cup \left(\overline{B_3(-2)} \cup \overline{B_4(-5)}\right).$$

Weiter wissen wir nach dem Korollar aus dem Satz von Gerschgorin (siehe Aufgabe 1.), dass es genau einen Eigenwert

$$\lambda_* \in \overline{B_3(5)}$$

geben muss, die anderen beiden Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ liegen somit in $\overline{B_3(-2)} \cup \overline{B_4(-5)}$. Da die Matrix A symmetrisch ($A = A^T$) und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist, folgt, dass alle Eigenwerte reellwertig sein müssen, d.h.

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}.$$

Zusammen erhalten wir so

$$\sigma(A) \subseteq \left[\overline{B_3(5)} \dot\cup \left(\overline{B_3(-2)} \cup \overline{B_4(-5)}\right)\right] \cap \mathbb{R} = [2,8] \,\dot\cup\, ([-5,1] \cup [-9,-1]).$$

Damit ist

$$\lambda_* \in [2,8] \text{ und } \lambda_2, \lambda_3 \in [-5,1] \cup [-9,-1].$$

(b) Der Wert $\lambda^{(0)} = 5$ ist eine gute Approximation an den Eigenwert λ_*, da der Wert $\lambda^{(0)}$ den Abstand zu λ_* im Vergleich zu den anderen Eigenwerten λ_2 und λ_3 minimiert. Dies sehen wir ein, indem wir unsere Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) ausnutzen:

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_* - \lambda^{(0)}\right| &= |\lambda_* - 5| \leq 3,\\
\left|\lambda_2 - \lambda^{(0)}\right| &= |\lambda_* - 5| \geq 4 > 3 \geq \left|\lambda_* - \lambda^{(0)}\right|,\\
\left|\lambda_3 - \lambda^{(0)}\right| &= |\lambda_3 - 5| \geq 4 > 3 \geq \left|\lambda_* - \lambda^{(0)}\right|.
\end{aligned}$$

Erster Schritt der inversen Iteration nach Wielandt: Unser Startvektor lautet

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und unsere erste Approximation ist $\lambda^{(0)} = 5$. Zuerst müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} w^{(1)} = (A - 5I_3)\, w^{(1)} = \left(A - \lambda^{(0)} I_3\right) w^{(1)} = y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies machen wir durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -10 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -10 & 0 \end{array}\right) \cdot(-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & -14 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot(-16) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -46 & -2 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{1}{46}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{23} \end{array}\right) \cdot(-2) \quad \cdot(-16)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{23} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{23} \end{array}\right).$$

Die Lösung $w^{(1)}$ lautet also

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{23} \\ -\frac{2}{23} \\ \frac{1}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir setzen weiter den Index $i_1 \in \{1, 2, 3\}$ so, dass

$$\left| w_{i_1}^{(1)} \right| = \max_{j=1,2,3} \left| w_j^{(1)} \right| = \frac{7}{23},$$

d.h. $i_1 = 1$ mit

$$w_{i_1}^{(1)} = w_1^{(1)} = \frac{7}{23}.$$

Dann definieren wir

$$\begin{aligned} y^{(1)} &:= \frac{1}{w_{i_1}^{(1)}} w^{(1)} = \frac{1}{\frac{7}{23}} \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda^{(1)} &:= \lambda^{(0)} = 5. \end{aligned}$$

(c) Im Wesentlichen gebe es zwei Alternativen, welche aber nicht vermischbar wären.
Eine Möglichkeit wäre nach dem zweiten Schritt über

$$\lambda^{(k)} := \lambda^{(k-1)} + \frac{1}{w_{i_{k-1}^{(k)}}} \text{ für } k \geq 2$$

stets diese Approximation zu nehmen und dann im nächsten Schritt das lineare Gleichungssystem

$$\left(A - \lambda^{(k)} I_3\right) w^{(k+1)} = y^{(k)}$$

zu lösen. Also stets die Gleichungssysteme mit der besseren Approximation lösen.
Eine andere Möglichkeit ist, zwar stets das Gleichungssystem mit derselben Approximation zu lösen, dafür aber bevor wir in den Algorithmus gehen eine LR-Zerlegung der Matrix $A - \lambda^{(0)} I_3$ zu bestimmen und im Algorithmus dann per Vorwärtseinsetzen und Rücksubstitution das lineare Gleichungssystem

$$\left(A - \lambda^{(0)} I_3\right) w^{(1)} = y^{(0)}$$

lösen. □