31.05.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

4. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 07.06.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Simplex-Algorithmus I)

Maximieren Sie die Funktion

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 8, \; x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &\leq 8, \\ x_2 + x_4 &\geq -4, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0, \; x_3 \leq 2 &\text{ und } x_4 \geq -1. \end{aligned}$$

Bringen Sie dabei das Problem erst ein Standardform. Handelt es sich auch um eine Normalform?

Aufgabe 2 (Anwendungsaufgabe zum Simplex-Algorithmus)

Im neu errichteten Produktionsbetrieb eines Unternehmens sollen Spielzeuge in fünf Ausführungen A_i, $i = 1, \ldots, 5$ mit jeweiligen Wochenstückzahlen x_i hergestellt werden. Die Fertigung erfolgt auf drei vollautomatisierten Maschinen M_1, M_2 und M_3. Die spezifischen Stückbearbeitungszeiten je Produkt und Maschine sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Bearbeitungszeit [Minuten/ Stück]	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
M_1	1	2	1	0	1
M_2	0	1	1	1	1
M_3	1	0	1	1	0

Zu beachten ist, dass M_1 auch für einen anderen Betrieb benötigt wird und nur 7 Stunden pro Woche zur Verfügung steht, M_2 dagegen 5 Stunden pro Woche und M_3 nur 3 Stunden pro Woche. Eine genaue Kalkulation ergab, dass A_1 und A_5 einen Deckungsbeitrag von 2 Euro pro Stück, A_2 und A_4 einen Deckungsbeitrag von 1 Euro pro Stück und A_3 einen Deckungsbeitrag von 3 Euro pro Stück erzielen werden. Gesucht ist das deckungsbeitragsmaximale wöchentliche Produktionsprogramm.

(a) Formulieren Sie eine dazu passende lineare Optimierungsaufgabe.

(b) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem aus Aufgabenteil (a) mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

(c) Beantworten Sie die Frage: Wieso ergibt sich hier eine ganzzahlige Lösung?

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt von der FernUniversität Hagen aus dem Kurs 00851: Lineare Opitmierung.

Aufgabe 3 (Simplex-Algorithmus II)

Es soll folgende Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3$$

mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ maximiert werden unter den folgenden Nebenbedingungen

$$x_1 - x_3 \leq 1,$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3, \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Bringen Sie dabei dies erstmal in die Normalform und benutzen Sie anschließend den Simplex-Algorithmus.
Maximieren Sie auch die Funktion f unter den Nebenbedingungen:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_3 &= 1, \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3, \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Wieso ist hier der in der Vorlesung vorgestellte Simplex-Algorithmus nicht anwendbar, obwohl es sich auch um ein lineares Optimierungsproblem handelt?