31.05.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Simplex-Algorithmus I)

Maximieren Sie die Funktion

$$y\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 8,\;\; x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}(I)\; & x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 8,\\ (II)\; & x_2 + x_4 \geq -4,\\ (III)\; & -x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3,\\ (IV)\; & x_1, x_2 \geq 0,\;\; x_3 \leq 2 \text{ und } x_4 \geq -1.\end{aligned}$$

Bringen Sie dabei das Problem erst ein Standardform. Handelt es sich auch um eine Normalform?

Lösung von Aufgabe 1

Das Optimierungsproblem dieser Aufgabe lautet:

$$\text{Maximiere } y\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 8$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 & \leq 8,\\ x_2 + x_4 & \geq -4,\\ -x_2 + x_3 + 3x_4 & \leq 3,\\ x_1, x_2 \geq 0,\;\; x_3 \leq 2 & \text{und } x_4 \geq -1.\end{cases}$$

Schritt 1. In Standard- und Normalform bringen: Wir erhalten durch Umformen und Setzen anschließend:

$$\begin{aligned}
(IV) &\Rightarrow\; \widetilde{x}_1 := x_1 \geq 0 \;\; (\text{d.h. } x_1 = \widetilde{x}_1)\,,\\
(IV) &\Rightarrow\; \widetilde{x}_2 := x_2 \geq 0 \;\; (\text{d.h. } x_2 = \widetilde{x}_2)\,,\\
(IV) &\Rightarrow\; x_3 \leq 2 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{x}_3 := 2 - x_3 \geq 0 \;\; (\text{d.h. } x_3 = 2 - \widetilde{x}_3)\,,\\
(IV) &\Rightarrow\; x_4 \geq -1 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{x}_4 := x_4 + 1\, (\text{d.h. } x_4 = \widetilde{x}_4 - 1)\,,\\
(III) &\Rightarrow\; 3 \geq -x_2 + x_3 + 3x_4 = -\widetilde{x}_2 + (2 - \widetilde{x}_3) + 3\,(\widetilde{x}_4 - 1) = -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 3\widetilde{x}_4 + 2 - 3 = -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 3\widetilde{x}_4 - 1\\
&\Leftrightarrow\; -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 3\widetilde{x}_4 \leq 3 + 1 = 4,\\
(II) &\Rightarrow\; -4 \leq x_2 + x_4 = \widetilde{x}_2 + (\widetilde{x}_4 - 1) = \widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_4 - 1 \;\Leftrightarrow\; -3 = -4 + 1 \leq \widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_4\\
&\Leftrightarrow\; -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_4 \leq 3,\\
(I) &\Rightarrow\; 8 \geq x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + 2\,(2 - \widetilde{x}_3) - 2\,(\widetilde{x}_4 - 1) = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_3 - 2\widetilde{x}_4 + 4 + 2\\
&= \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_3 - 2\widetilde{x}_4 + 6\\
&\Leftrightarrow\; \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_3 - 2\widetilde{x}_4 \leq 8 - 6 = 2.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}y\,(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 8 = \widetilde{x}_1 + 2\widetilde{x}_2 + 3\,(2 - \widetilde{x}_3) + (\widetilde{x}_4 - 1) + 8\\ &= \widetilde{x}_1 + 2\widetilde{x}_2 - 3\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4 + 6 - 1 + 8 = \widetilde{x}_1 + 2\widetilde{x}_2 - 3\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4 + 13.\end{aligned}$$

Setze nun:

$$\widetilde{y}\,(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4) = \widetilde{x}_1 + 2\widetilde{x}_2 - 3\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4.$$

Nun lautet unser neues Optimierungsproblem, deren Nebenbedingungen äquivalent zu $(*)$ sind, in Standard- bzw. Normalenform:

$$\text{Maximiere } \widetilde{y}\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4\right) = \widetilde{x}_1 + 2\widetilde{x}_2 - 3\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(**) \begin{cases} \left(\widetilde{I}\right) & \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_3 - 2\widetilde{x}_4 & \leq 2, \\ \left(\widetilde{II}\right) & -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_4 & \leq 3, \\ \left(\widetilde{III}\right) & -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 3\widetilde{x}_4 & \leq 4, \\ \left(\widetilde{IV}\right) & \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4 & \geq 0. \end{cases}$$

Schritt 2. Das Simplex-Tableau aufstellen: Dazu führen wir die Schlupfvariablen y_1, y_2 und y_3 ein mit

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_3 - 2\widetilde{x}_4 + y_1 & = 2, \\ -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_4 + y_2 & = 3, \\ -\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 3\widetilde{x}_4 + y_3 & = 4, \\ \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4, y_1, y_2, y_3 & \geq 0. \end{cases}$$

Setze nun $n = 4$, $m = 3$ und

$$\widetilde{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \widetilde{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das (Anfangs-)Simplex-Tableau lautet nun

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	$\widetilde{b}$
y_1	1	1	-2	-2	1	0	0	2
y_2	0	-1	0	-1	0	1	0	3
y_3	0	-1	-1	3	0	0	1	4
$-\widetilde{c}$	-1	-2	3	-1	0	0	0	0

Schritt 3. Durchführung des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	$\widetilde{b}$	
y_1	1	1	-2	-2	1	0	0	2	$\longleftarrow$ Pivotzeile
y_2	0	-1	0	-1	0	1	0	3	
y_3	0	-1	-1	3	0	0	1	4	
$-\widetilde{c}$	-1	-2	3	-1	0	0	0	0	

$\uparrow$
Pivotspalte (-2 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -2 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die erste Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 1 der einzige positive war. Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	$\widetilde{b}$	
y_1	1	1	-2	-2	1	0	0	2	
y_2	0	-1	0	-1	0	1	0	3	$\cdot 1$ $+$
y_3	0	-1	-1	3	0	0	1	4	$\cdot 1$ $+$
$-\widetilde{c}$	-1	-2	3	-1	0	0	0	0	$\cdot 2$ $+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
$\widetilde{x}_2$	1	1	-2	-2	1	0	0	2
y_2	1	0	-2	-3	1	1	0	5
y_3	1	0	-3	1	1	0	1	6
$\cdot$	1	0	-1	-5	2	0	0	4

$\longleftarrow$ Pivotzeile

Pivotspalte (-5 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -5 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die dritte Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eintrag 1 der einzige positive war. Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
$\widetilde{x}_2$	1	1	-2	-2	1	0	0	2
y_2	1	0	-2	-3	1	1	0	5
y_3	1	0	-3	1	1	0	1	6
$\cdot$	1	0	-1	-5	2	0	0	4

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
$\widetilde{x}_2$	3	1	-8	0	3	0	2	14
y_2	4	0	-11	0	4	1	3	23
$\widetilde{x}_4$	1	0	-3	1	1	0	1	6
$\cdot$	6	0	-16	0	7	0	5	34

Pivotspalte (-16 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -16 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, aber es ist keine Pivotzeile wählbar, da kein Eintrag in der Pivotspalte positiv ist. Demnach bricht an dieser Stelle der Simplex-Algorithmus ab und wir erkennen, dass der Wert $\widetilde{x}_3$ beliebig groß gewählt werden kann, damit ist die Lösung unbeschränkt.

Beispiel: Wir können z.B.

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_4 &:= 0,\\
\widetilde{x}_3 &:= t \text{ für } t \geq 0,\\
\widetilde{x}_2 &:= 2t \text{ für } t \geq 0,\\
\widetilde{x}_1 &:= 0
\end{aligned}$$

wählen, so sind alle Nebenbedingungen von $(**)$ für alle $t \geq 0$ erfüllt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_3 - 2\widetilde{x}_4 = 0 + 2t - 2t - 2 \cdot 0 = 0 - 0 = 0 \leq 2 \ &\Rightarrow \ \left(\widetilde{I}\right),\\
-\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_4 = -2t - 0 = -2t \leq 0 \leq 3 \ &\Rightarrow \ \left(\widetilde{II}\right),\\
-\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 3\widetilde{x}_4 = -2t - t + 3 \cdot 0 = -3t + 0 = -3t \leq 0 \leq 4 \ &\Rightarrow \ \left(\widetilde{III}\right),\\
\widetilde{x}_1 = 0 \geq 0,\ \widetilde{x}_2 = 2t \geq 0,\ \widetilde{x}_3 = t \geq 0,\ \widetilde{x}_4 = 0 \geq 0 \ &\Rightarrow \ \left(\widetilde{IV}\right),
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$, aber für die Zielfunktion folgt nun:

$$\widetilde{y}\,(0, 2t, t, 0) = 0 + 2 \cdot 2t - 3t + 0 = 4t - 3t = t \text{ für alle } t \geq 0$$

und damit auch

$$\widetilde{y}\,(0, 2t, t, 0) = t \to \infty \text{ für } t \to \infty.$$

$\square$

Aufgabe 2 (Anwendungsaufgabe zum Simplex-Algorithmus)

Im neu errichteten Produktionsbetrieb eines Unternehmens sollen Spielzeuge in fünf Ausführungen A_i, $i = 1, \ldots, 5$ mit jeweiligen Wochenstückzahlen x_i hergestellt werden. Die Fertigung erfolgt auf drei vollautomatisierten Maschinen M_1, M_2 und M_3. Die spezifischen Stückbearbeitungszeiten je Produkt und Maschine sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Bearbeitungszeit [Minuten/ Stück]	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
M_1	1	2	1	0	1
M_2	0	1	1	1	1
M_3	1	0	1	1	0

Zu beachten ist, dass M_1 auch für einen anderen Betrieb benötigt wird und nur 7 Stunden pro Woche zur Verfügung steht, M_2 dagegen 5 Stunden pro Woche und M_3 nur 3 Stunden pro Woche. Eine genaue Kalkulation ergab, dass A_1 und A_5 einen Deckungsbeitrag von 2 Euro pro Stück, A_2 und A_4 einen Deckungsbeitrag von 1 Euro pro Stück und A_3 einen Deckungsbeitrag von 3 Euro pro Stück erzielen werden. Gesucht ist das deckungsbeitragsmaximale wöchentliche Produktionsprogramm.

(a) Formulieren Sie eine dazu passende lineare Optimierungsaufgabe.

(b) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem aus Aufgabenteil (a) mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

(c) Beantworten Sie die Frage: Wieso ergibt sich hier eine ganzzahlige Lösung?

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt von der FernUniversität Hagen aus dem Kurs 00851: Lineare Opitmierung.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Wir lesen aus der Aufgabenstellung und der darin befindenden Tabelle das zu lösende Optimierungsproblem ab:

$$\text{Maximiere } z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 & \leq 7 \cdot 60 = 420, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \leq 5 \cdot 60 = 300, \\ x_1 + x_3 + x_4 & \leq 3 \cdot 60 = 180, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \ \ (\text{und } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}_0) \,. \end{cases}$$

(b) **Schritt 1. In Standard- und Normalform bringen**: Das Optimierungsproblem befindet sich schon in der Standard- bzw. Normalenform.
Schritt 2. Das Simplex-Tableau aufstellen: Dazu führen wir die Schlupfvariablen y_1, y_2 und y_3 ein mit

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + y_1 & = 420, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_2 & = 300, \\ x_1 + x_3 + x_4 + y_3 & = 180, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \ \ (\text{und } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}_0) \,. \end{cases}$$

Setze nun $n = 5$, $m = 3$ und

$$b := \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix}, \ c := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das (Anfangs-)Simplex-Tableau lautet nun

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b
y_1	1	2	1	0	1	1	0	0	420
y_2	0	1	1	1	1	0	1	0	300
y_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180
$-c$	-2	-1	-3	-1	-2	0	0	0	0

Schritt 3. Durchführung des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b	
y_1	1	2	1	0	1	1	0	0	420	
y_2	0	1	1	1	1	0	1	0	300	
y_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180	$\longleftarrow$ Pivotzeile
$-c$	-2	-1	-3	-1	-2	0	0	0	0	

Pivotspalte (-3 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -3 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die dritte Zeile, da wir dort aus den positiven Einträgen der Pivotspalte und der letzten Spalte berechnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_1}{a_{13}} &= \frac{420}{1} = 420,\\
\frac{b_2}{a_{23}} &= \frac{300}{1} = 300,\\
\frac{b_3}{a_{33}} &= \frac{180}{1} = 180,\\
\text{und } \frac{b_1}{a_{13}} &\geq \frac{b_2}{a_{23}} \geq \frac{b_3}{a_{33}}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b	
y_1	1	2	1	0	1	1	0	0	420	$+$
y_2	0	1	1	1	1	0	1	0	300	$+$ $\cdot(-1)$ $\cdot(-1)$
y_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180	
$-c$	-2	-1	-3	-1	-2	0	0	0	0	$\cdot 3$ $+$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	$\cdot$	
y_1	0	2	0	-1	1	1	0	-1	240	
y_2	-1	1	0	0	1	0	1	-1	120	$\longleftarrow$ Pivotzeile
x_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180	
$\cdot$	1	-1	0	2	-2	0	0	3	540	

Pivotspalte (-2 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -2 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die zweite Zeile, da wir dort aus den positiven Einträgen der Pivotspalte und der letzten Spalte berechnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_1}{a_{15}} &= \frac{240}{1} = 240,\\
\frac{b_2}{a_{25}} &= \frac{120}{1} = 120,\\
\text{und } \frac{b_1}{a_{15}} &\geq \frac{b_2}{a_{25}}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist).

Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
y_1	0	2	0	−1	1	1	0	−1	240
y_2	−1	1	0	0	1	0	1	−1	120
x_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180
$\cdot$	1	−1	0	2	−2	0	0	3	540

$+\ \cdot(-1)$ $\cdot 2\ +$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
y_1	1	1	0	−1	0	1	−1	0	120
x_5	−1	1	0	0	1	0	1	−1	120
x_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180
$\cdot$	−1	1	0	2	0	0	2	1	780

$\longleftarrow$ Pivotzeile

Pivotspalte (-1 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -1 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die erste Zeile, da wir dort aus den positiven Einträgen der Pivotspalte und der letzten Spalte berechnen:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{120}{1} = 120,$$
$$\frac{b_3}{a_{31}} = \frac{180}{1} = 180,$$
$$\text{und } \frac{b_3}{a_{31}} \geq \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
y_1	1	1	0	−1	0	1	−1	0	120
x_5	−1	1	0	0	1	0	1	−1	120
x_3	1	0	1	1	0	0	0	1	180
$\cdot$	−1	1	0	2	0	0	2	1	780

$\cdot 1\ +$ $\cdot(-1)\ +$ $\cdot 1\ +$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	$\cdot$
x_1	1	1	0	−1	0	1	−1	0	120
x_5	0	2	0	−1	1	1	0	−1	240
x_3	0	−1	1	2	0	−1	1	1	60
$\cdot$	0	2	0	1	0	1	1	1	900

Wir können hier in diesem Simplex-Tableau keine Pivotspalte mehr wählen, da alle Einträge in der letzten Zeile nicht-negativ sind, d.h. der Simplex-Algorithmus bricht an dieser Stelle ab. Wir können nun nach der Vorlesung das Maximum der Funktion z unter den gegebenen Nebenbedingung $(*)$ ablesen (rechte untere Ecke vom letzten Simplex-Tableau):

Das Maximum der Funktion z ist 900 und wird im Punkt $x = (120, 0, 60, 0, 240) \in \mathbb{R}^5$ angenommen,

d.h.

$$\max_{(*)} y\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = y\,(120, 0, 60, 0, 240) = 900.$$

Auf die Aufgabenstellung bezogen sind 900 Euro das wöchentliche Deckungsbeitragsmaximum, indem der Produktionsbetrieb 120 Stück vom Spielzeug A_1, 60 Stück vom Spielzeug A_3 und 240 Stück vom Spielzeug A_5, sowie die Spielzeuge A_2 und A_4 gar nicht, die Woche herstellt.

(c) Alle Pivotelemente sind schon normiert (d.h. sie sind gleich 1) und außerdem sind alle Koeffizienten und Einträge stets ganzzahlig so, dass beim Teilen automatisch etwas ganzzahliges rauskommen muss. ☐

Aufgabe 3 (Simplex-Algorithmus II)

Es soll folgende Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3$$

mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ maximiert werden unter den folgenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &\leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bringen Sie dabei dies erstmal in die Normalform und benutzen Sie anschließend den Simplex-Algorithmus. Maximieren Sie auch die Funktion f unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Wieso ist hier der in der Vorlesung vorgestellte Simplex-Algorithmus nicht anwendbar, obwohl es sich auch um ein lineares Optimierungsproblem handelt?

Lösung von Aufgabe 3

Das Optimierungsproblem dieser Aufgabe lautet:

$$\text{Maximiere } f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(*) \begin{cases} x_1 - x_3 & \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

Schritt 1. In Standard- und Normalform bringen: Setze dafür

$$\widetilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + 3 = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3 + 3 = -x_1 + x_2 + 3x_3$$

für alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Das zur Aufgabe äquivalente Problem in Standard-/ Normalform lautet nun

$$\text{Maximiere } \widetilde{f}(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.) :}(**) \begin{cases} x_1 - x_3 & \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

Schritt 2. Das Simplex-Tableau aufstellen: Dazu führen wir die Schlupfvariablen y_1 und y_2 ein mit

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + y_1 & = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 & = 3, \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 & \geq 0. \end{cases}$$

Setze nun $n = 3$, $m = 2$ und

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; c := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das (Anfangs-)Simplex-Tableau lautet nun

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
y_1	1	0	−1	1	0	1
y_2	1	2	1	0	1	3
$-c$	1	−1	−3	0	0	0

Schritt 3. Durchführung des Simplex-Algorithmus:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
y_1	1	0	-1	1	0	1	
y_2	1	2	1	0	1	3	$\longleftarrow$ Pivotzeile
$-c$	1	-1	-3	0	0	0	

$\uparrow$
Pivotspalte (-3 negativster Eintrag (in der letzten Zeile))

Wir konnten die Pivotspalte wählen, da -3 der negativste Eintrag in der letzten Zeile war, und als Pivotzeile die zweite Zeile, da dort in der Pivotspalte der Eitnrag 1 der einzige positive war. Also haben wir unser Pivotelement gefunden (grün eingekreist). Nun folgt der Gausssche Eliminationsschritt:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
y_1	1	0	-1	1	0	1	$\leftarrow +$
y_2	1	2	1	0	1	3	$\cdot 1$ $\quad \cdot 3$
$-c$	1	-1	-3	0	0	0	$\leftarrow +$

Wir erhalten so das folgende Simplex-Tableau:

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\cdot$
y_1	2	2	0	1	1	4
x_3	1	2	1	0	1	3
$\cdot$	4	5	0	0	3	9

Wir können hier in diesem Simplex-Tableau keine Pivotspalte mehr wählen, da alle Einträge in der letzten Zeile nicht-negativ sind, d.h. der Simplex-Algorithmus bricht an dieser Stelle ab. Wir können nun nach der Vorlesung das Maximum der Funktion $\widetilde{f}$ unter den gegebenen Nebenbedingung $(**)$ ablesen (rechte untere Ecke vom letzten Simplex-Tableau):

$$\text{Das Maximum der Funktion } \widetilde{f} \text{ ist 9 und wird im Punkt } x = (0,0,3) \in \mathbb{R}^3 \text{ angenommen,}$$

d.h.

$$\max_{(**)} \widetilde{f}(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{f}(0,0,3) = 9.$$

Also ist auch

$$f(0,0,3) = \widetilde{f}(0,0,3) - 3 = 9 - 3 = 6$$

das Maximum der Funktion f unter den anfänglichen Nebenbedingungen $(*)$. $\square$

Ändern wir nun die anfänglichen Nebenbedingungen $(*)$ von der Funktion f ab zu

$$(\widetilde{*}) \begin{cases} \left(\widetilde{I}\right) & x_1 - x_3 & = 1, \\ \left(\widetilde{II}\right) & x_1 + 2x_2 + x_3 & = 3, \\ \left(\widetilde{III}\right) & x_1, x_2, x_3 & \geq 0, \end{cases}$$

so erhalten wir z.B. durch Umformung und Einsetzen:

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{III}\right) \quad & \Rightarrow \quad 0 \leq x_3 = t \text{ für } t \geq 0, \\ \left(\widetilde{I}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad 1 = x_1 - x_3 = x_1 - t \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 + t, \\ \left(\widetilde{II}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad 3 = x_1 + 2x_2 + x_3 = (1+t) + 2x_2 + t = 1 + 2x_2 + 2t \quad \Leftrightarrow \quad 2(x_2 + t) = 2x_2 + 2t = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad x_2 + t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1 - t, \\ \left(\widetilde{III}\right) \quad & \Rightarrow \quad 0 \leq x_2 = 1 - t \quad \Leftrightarrow t \leq 1. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir:

$$\begin{aligned} t &\in [0,1], \\ x_1 &= 1 + t, \\ x_2 &= 1 - t, \\ x_3 &= t. \end{aligned}$$

Das liefert uns nun durch Einsetzen in unsere Funktion f:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3 = -(1+t) + (1-t) + 3t - 3 = -1 - t + 1 - t + 3t - 3 = t - 3 \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Wegen $t \in [0,1]$ folgt nun, dass die Funktion f maximal für $t = 1$ wird mit Maximum $1 - 3 = -2$. Demnach ist das Maximum der Funktion f unter den Nebenbedingungen $(\widetilde{*})$ gerade -2 und wird im Punkt

$$x_1 = 1 + 1 = 2, \; x_2 = 1 - 1 = 0, \; x_3 = 1, \text{ d.h. im Punkt } x = (2,0,1) \in \mathbb{R}^3$$

angenommen. $\square$