19.06.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

5. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 28.06.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Induzierte Matrix p-Normen)

Zu $p \in [1, \infty]$ setzen wir die Vektornorm

$$\begin{cases} \|v\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ falls } p < \infty, \\ \|v\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |v_i|, \text{ falls } p = \infty \end{cases}$$

für Vektoren $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$. Zu einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einer Vektorraumnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^n$ definieren wir die durch $\|\cdot\|$-induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_*$ durch

$$\|A\|_* := \sup_{v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v\in\mathbb{C}^n:\ \|v\|=1} \|Av\|.$$

Wir wollen nun für die drei Fälle, dass $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$ ist, genauer betrachten. Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ \text{(”Spaltensummennorm”)}, \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^H A\right)} = \left(\lambda_{\max}\left(A^H A\right)\right)^{\frac{1}{2}} \ \text{(”Spektralnorm”)}, \\ \|A\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \text{(”Zeilensummennorm”)}, \end{aligned}$$

dabei bezeichnen wir mit $\lambda_{\max}(B)$ für eine postiv semi-definite Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ den maximalen Eigenwert. Die Normen auf der linken Seite sind stets die von der jeweiligen p-Vektorraumnorm induzierten Matrixnorm.

Aufgabe 2 (Zu induzierten Matrixnormen)

(a) Sei $\|\cdot\|_*$ eine induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für die Einheitsmatrix $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ stets gilt:

$$\|I_n\|_* = 1.$$

(b) Finden Sie eine Matrixnorm $\|\cdot\|_*$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ so, dass für die Einheitsmatrix $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\|I_n\|_* \neq 1$$

gilt.

(c) Seien $\|\cdot\|_*$ eine durch $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie:

$$\|A\|_* = \frac{1}{\min_{v\in\mathbb{C}^n:\ \|v\|=1} \|A^{-1}v\|}.$$

Aufgabe 3 (Satz von Neumann)

Seien $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{n\times n}$, sowie $\|\cdot\|_*$ eine submultiplikative Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$, d.h. $\|\cdot\|_*$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft

$$\|AB\|_* \leq \|A\|_* \|B\|_* \quad \text{für alle Matrizen } A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie, dass falls $\|S\|_* < 1$ ist, ist die Matrix $I_n + S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär und die inverse Matrix $(I_n + S)^{-1}$ hat die folgende Form und erfüllt die nachfolgende Abschätzung

$$(I_n + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k,$$

$$\left\|(I_n + S)^{-1}\right\|_* \leq \frac{\|I_n\|_*}{1 - \|S\|_*}.$$

Dabei setzen wir $A^0 := I_n$ für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. (**Hinweis**: Erinnern Sie sich an die geometrische Reihe.)

Aufgabe 4 (Fehlerabschätzung und Kondition)

Prüfen Sie auch in allen drei folgenden Teilaufgaben nach, dass die Bedingungen für die jeweiligen Sätze erfüllt sind.

(a) Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weiter erfüllt die Störmatrix $\Delta A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und der Störvektor Δb die Abschätzungen

$$\|\Delta A\|_2 \leq \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad \|\Delta b\|_2 \leq 10^{-3}.$$

Wie groß ist maximal der relative Fehler (in der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$) der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b?$$

(b) Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter seien die Störungen gegeben durch $\Delta A = 0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und

$$\Delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

für ein $\varepsilon > 0$. Wie klein muss die Störung Δb sein (d.h. wie muss $\varepsilon > 0$ gewählt werden) um einen absoluten bzw. relativen Fehler in der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ von höchstens 10^{-3} zu gewährleisten?

(c) Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter seien die Störungen gegeben durch $\Delta b = 0 \in \mathbb{R}^2$ und

$$\Delta A = \frac{\varepsilon}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für ein $\varepsilon > 0$. Wie klein muss die Störung ΔA sein (d.h. wie muss $\varepsilon > 0$ gewählt werden) um einen relativen Fehler in der Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$ von höchstens 10^{-3} zu gewährleisten?