01.07.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

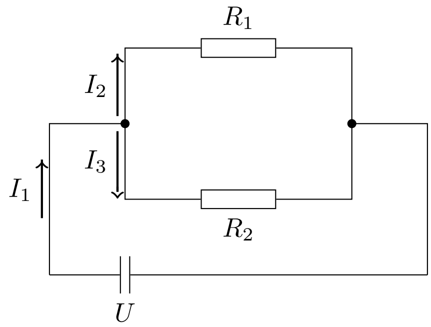
Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

6. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 05.07.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Nochmal etwas zu Fehlerabschätzung und Kondition)

Wir betrachten den folgenden Stromkreis



mit Stromstärken I_1, I_2 und I_3, einer anliegenden Spannung U und den Widerständen R_1 und R_2. Welche Zusammenhänge zwischen diesen Größen lassen sich aufstellen? Der Hersteller macht folgende Angaben:

$$R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 4\Omega \text{ und } U = 20\text{V}.$$

Weiter garantiert der Hersteller folgende maximale Schwankungen:

- Beim Widerstand R_1: $0,01\Omega$.
- Beim Widerstand R_2: $0,04\Omega$.
- Bei der Spannung U: $0,1$V.

Geben Sie eine Schranke für den relativen Fehler von der Stromstärke $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$ an (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$). Was können Sie über den absoluten Fehler $\|\Delta I\|_\infty$ aussagen?

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren I)

Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + 3x_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix der Funktion F im Ursprung $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ singulär ist.

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ durch.

(c) Zeigen Sie, dass die Newton-Iteration zu F für jeden Startwert $x^{(0)} = \big(0, \varepsilon\big) \in \mathbb{R}^2$, mit $\varepsilon > 0$ beliebig klein, nicht durchführbar ist.

Aufgabe 3 (Approximation der Wurzel)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die reelle Zahl $\sqrt{17}$ bis auf fünf Nachkommastellen genau. Begründen Sie dabei die Wahl ihres Startwertes $x^{(0)}$.

Aufgabe 4 (Nullstellenbestimmung)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-x} - 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle x^* auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt und schränken Sie diese Nullstelle auf ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ der Länge $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ein.

(b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens durch, wählen Sie dabei ihren Startwert $x^{(0)}$ aus dem Intervall I.

(c) Beweisen Sie nun die Abschätzung für die Iterationsschritte $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Newton-Iteration:

$$\left|x^* - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{1}{2^{2k+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+1}\mathrm{e}^2} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei wir mit $x^* \in \mathbb{R}$ die Nullstelle der Funktion f bezeichnen. Begründen Sie nun weiter, warum die Newton-Iteration in diesem Falle konvergiert.